NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE
UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK
Faglig kontakt under eksamen:
Asle Sudbø
Tlf: 93403
Mobiltelefon: 91 63 59 79

EKSAMEN I FAG 74315 - STATISTISK MEKANIKK
Mandag 2. august 1999
kl. 0900-1300
Tillatte hjelpemidler: Godkjent lommekalkulator
Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Rottmann: Matematisk Formelsamling
Barnett & Cronin: Mathematical Formulae

Oppgave 1

Én-dimensjonale ideelle kvantegasser i et "volum" $V = L$, hvor L er systemets lengde, har trykk, tetthet, og indre energi gitt på formen

$$\begin{aligned}
\beta p V &= \beta \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \; \frac{H(\varepsilon)\, z}{e^{\beta\varepsilon} \pm z}; \quad \rho = \frac{1}{L} \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \; \frac{h(\varepsilon)\, z}{e^{\beta\varepsilon} \pm z} \\
U &= \int_{-\infty}^{\infty} d\varepsilon \; \frac{h(\varepsilon)\, \varepsilon\, z}{e^{\beta\varepsilon} \pm z} \\
\frac{dH(\varepsilon)}{d\varepsilon} &= h(\varepsilon); \quad h(\varepsilon) = \sum_k \delta(\varepsilon - \varepsilon_k) = \frac{L}{2\pi} \int dk \; \delta(\varepsilon - \varepsilon_k)
\end{aligned}$$

Energien til partiklene, som funksjon av bølgetallet k i dette én-dimensjonale systemet antas gitt ved $\varepsilon_k = E_0 \, |k|^\nu$, hvor E_0 er en positiv konstant, ν er et reellt positivt tall, $\beta = 1/k_B T$, T er systemets temperatur, k_B er Boltzmanns konstant, og fugasiteten z er gitt ved $z = \exp(\beta\mu)$, hvor μ er kjemisk potensial. I hele oppgaven gjelder det øverste fortegnet for fermioner, det nederste for bosoner. Dersom vi setter $\nu = 1$, kan uttrykkene beskrive nøytrinoer og fotoner. I deloppgavene **a)** t.o.m. **d)** lar vi ν være helt generell.

a) Finn $h(\varepsilon)$ og $H(\varepsilon)$ som funksjon av ε.

b) Finn pV uttrykt ved U i disse systemene.

c) Finn fugasitetsutviklingen for tetthet og trykk i disse systemene, gitt ved

$$\rho = \frac{1}{R_\nu} \sum_{l=1}^{\infty} c_{l\nu} \; z^l; \qquad \beta p = \frac{1}{R_\nu} \sum_{l=1}^{\infty} d_{l\nu} \; z^l$$

dvs. bestem R_ν, $c_{l\nu}$, og $d_{l\nu}$.

d) For hvilke verdier av ν kan boson-gassen fremvise Bose-Einstein kondensasjon ved en temperatur $T_\lambda > 0$? Finn T_λ i slike tilfeller.

e) I resten av Oppgave 1 settes $\nu = 1$. Vis at

$$\beta p = \mp \int_0^\rho d\rho' \frac{\rho' R_1}{e^{\mp \rho' R_1} - 1}$$

f) Finn virial-koeffisientene $B_l(T)$ til disse gassene, og derved et eksakt uttrykk for trykk-differansen mellom én-dimensjonale nøytrino- og foton-gasser som har samme tetthet og temperatur.

I oppgave **f)** kan det være hensiktsmessig å bruke identiteten

$$\frac{x}{e^x - 1} = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \frac{x^n}{n!}$$

hvor $C_0 = 1, C_1 = -1/2, C_2 = 1/6, C_4 = -1/36$ etc. Det oppgis også at $C_{2n+1} = 0; \quad n = 1, 2, 3....$

Oppgave 2

a) Forklar under hvilke forutsetninger sannsynlighetsfordelingen W til mikrotilstander i et mangepartikkelsystem kun vil avhenge av systemets mikrotilstand via Hamilton-funksjonen H.

b) Forklar hva et mikrokanonisk, kanonisk, og stort kanonisk ensemble er. Angi i hvert tilfelle formen på W, og hvilke parametre som er fiksert i sannsynlighetsfordelingen av mikrotilstander.

c) Vis, med utgangspunkt i den kanoniske partisjonsfunksjonen for et system, at et system med endelig antall frihetsgrader ikke kan fremvise en faseovergang.

XY-modellen er et viktig modellsystem i fysikk. Se på N uavhengige XY-spinn, $\vec{S}_i, i = 1,..N$, hver med lengde $|\vec{S}_i| = 1$, som bare kan ha en x- og en y-komponent. Hvert spinn kan ha en vilkårlig retning i xy-planet. Disse spinnene er koblet til et konstant magnetfelt $\vec{h}$ som peker i x-retningen, slik at klassisk Hamilton-funksjon for hele systemet blir

$$H = -\vec{h} \cdot \sum_{i=1}^{N} \vec{S}_i = -h \sum_{i=1}^{N} \cos(\phi_i)$$

hvor ϕ_i er vinkelen mellom h og $\vec{S}_i$, og $\phi_i \in [0, 2\pi >, \ \forall \ i$.

d) Beregn kanonisk partisjonsfunksjon Z.

e) Beregn indre energi U og spesifikk varme ved lave temperaturer slik at $\beta h \gg 1$. Forklar resultatet med basis i ekvipartisjons teoremet.

f) Beregn spesifikk varme for vilkårlig temperatur for et tilsvarende system av Ising-spinn, hvor spinnene har lengde 1, men bare kan peke med eller mot magnetfeltet. Forklar, med utgangspunkt i ekvipartisjons teoremet, hvorfor resultatet ved lave temperaturer avviker *kvalitativt* fra svaret funnet i **e)**.

Følgende opplysninger *kan* det bli bruk for. Det forutsettes at kandidaten selv kan tolke symbolene i uttrykkene:

$$
\begin{aligned}
\Gamma(x) &= \int_0^\infty dt\ t^{x-1}\ e^{-t} \\
\Gamma(x+1) &= x\ \ \Gamma(x) \\
n!(n+1) &= (n+1)! \\
\zeta(x) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} \\
\ln(1+x) &= \sum_{l=1}^{\infty} \frac{(-1)^{l-1}}{l}\ x^l \\
\sum_i\ f(\omega_i) &= \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \left[\sum_i \delta(\omega-\omega_i)\right] f(\omega) \\
\int_{-\infty}^{\infty} dx\ f(x)\ \delta(\varepsilon - x) &= f(\varepsilon) \\
\int_0^\infty d\varepsilon\ \frac{\varepsilon^n\ \ z}{e^{\beta\varepsilon} \pm z} &= \frac{\Gamma(n+1)}{\beta^{n+1}} \sum_{l=1}^{\infty} (\mp 1)^{l-1} \frac{z^l}{l^{n+1}} \\
I_0(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} d\phi\ e^{x\cos(\phi)} \\
I_0 &\approx \frac{e^x}{\sqrt{2\pi x}};\quad x \gg 1
\end{aligned}
$$

- Funksjonene $\Gamma(x)$ og $\zeta(x)$ kan antas kjente der man måtte få bruk for dem.
- Nøytrinoet er en elementærpartikkel uten ladning, som vi anser for masseløs og spinnløst i denne oppgaven, og det er et fermion. Fotonet er lysfeltets minste bestanddel, og det kan i denne oppgaven betraktes som et spinnløst boson .
- Virialutviklingen for tilstandsligningen for gasser er gitt ved

$$\beta p = \sum_{l=1}^{\infty}\ B_l(T)\ \rho^l$$

- Indre energi og varmekapasiteten for et system er gitt ved

$$U = -\frac{\partial \ln Z}{\partial \beta};\quad C = k_B\ \beta^2\ \frac{\partial^2 \ln Z}{\partial \beta^2}$$

- Sammenheng mellom tetthet og trykk i stort kanonisk ensemble

$$\rho = z\ \ \frac{\partial(\beta p)}{\partial z}$$