NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITETET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
P. C. Hemmer
Tel. 93648

EKSAMEN I FAG 74326 KVANTEMEKANIKK 2

Fredag 17. januar 1997
kl. 0900-1400

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Rottmann: Matematisk formelsamling
Barnett and Cronin: Mathematical Formulae
Godkjent kalkulator

Endel uttrykk, formler og konstanter er gitt i eget vedlegg.

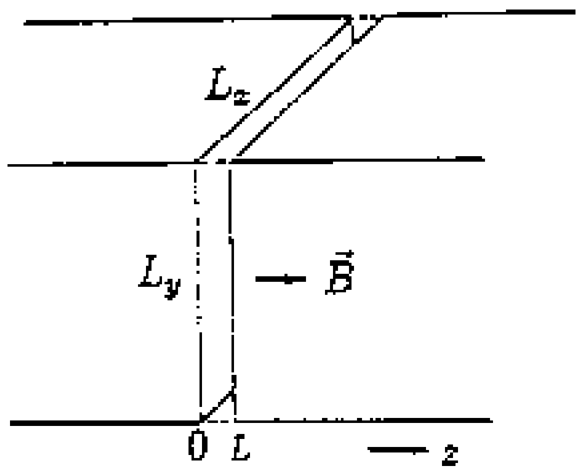
Oppgave 1

Et elektron med masse m og ladning $-e$ befinner seg i en spalt med ugjennomtrengelige vegger i $z=0$ og $z=L$. Et magnetfelt $\bar{B}$ normalt på veggene beskrives ved vektorpotensialet

$$\bar{A} = (0, xB, 0).$$

a) Skriv ned (for $0 < z < L$) den stasjonære Schrödingerlikning for elektronets bølgefunksjon $\psi(\bar{r})$. Vis at likningen har løsninger der y-avhengigheten er i form av en eksponensiell faktor e^{iky} i ψ. Bestem elektronets energiegenverdier.

b) La spalten ha et endelig volum med meget store utstrekninger L_x og L_y i x- og y-retningene. Anta at elektronets bølgefunksjon adlyder periodiske grensevilkår i disse retningene.



Vis at degenerasjonsgraden g av energinivåene er

$$g = \frac{\Phi}{\Phi_0},$$

der Φ er den magnetiske fluks gjennom tverrsnittet $L_x L_y$ og $\Phi_0 = h/e$ er det magnetiske flukskvantet.

Oppgave 2

a) For et elektron i en eksitert atomær tilstand $|i\rangle$ (med energi E_i) vil det dominerende vekselvirkningsleddet i Hamiltonoperatoren i første ordens tidsavhengig perturbasjonsteori gi følgende spontane overgangssannsynlighet pr. tidsenhet til en annen atomær tilstand $|f\rangle$ (energi $E_f < E_i$), med det emitterte foton i romvinkelintervallet $d\Omega$ og med polarisasjonsvektor $\vec{e}_{\vec{k}\lambda}$:

$$d\Gamma_{i\to f} = d\Omega\, \frac{\alpha\omega_{if}^3}{2\pi c^2} \left|\vec{e}_{\vec{k}\lambda} \cdot \langle f|\vec{r}|i\rangle\right|^2 .$$

Her er $\vec{k}$ fotonets bølgevektor, $\omega_{if} = (E_i - E_f)/\hbar$, α er finstrukturkonstanten, og elektrisk-dipol-tilnærmelsen er benyttet.

Hva er "det dominerende vekselvirkningsleddet" som er brukt her? Hvilke andre typer vekselvirkningsledd mellom strålingsfelt og ladede partikler kan forekomme? Forklar kort hvorledes disse framkommer.

Hva består elektrisk-dipol-tilnærmelsen i, regneteknisk og fysisk? Hva er en forbudt overgang?

b) Vis ved hjelp av resultatet i punkt a) at den spontane overgangssannsynlighet pr. tidsenhet for $i \to f$ kan skrives

$$w^{sp}_{i\to f} = \frac{4\alpha\omega^3_{if}}{3c^2} \, |\langle f|\vec{r}|i\rangle|^2.$$

c) Den røde H_α-linjen i hydrogenspektret skyldes $3p \to 2s$ overganger. Beregn den spontane overgangssannsynlighet fra én av $3p$-tilstandene til $2s$-tilstanden. Er det andre tillatte spontane overganger fra den valgte $3p$-tilstanden?

d) Anta at hydrogenatomer er utsatt for termisk stråling med temperatur 1000 K. Beregn ved hjelp av Einsteins likevektsargument forholdet mellom induserte og spontane overganger fra en $3p$-tilstand til $2s$-tilstanden.

Oppgave 3

Vis at den totale dreieimpuls $\vec{J} = \vec{L} + \vec{S}$ er en bevegelseskonstant for en fri Dirac-partikkel. Her er $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$, og

$$\vec{S} = \frac{\hbar}{2i}\,(\alpha_2\alpha_3, \alpha_3\alpha_1, \alpha_1\alpha_2)$$

Det er tilstrekkelig å vise dette for x-komponenten av $\vec{J}$.

Oppgave 4

a) $\vec{J}_1$ og $\vec{J}_2$ er dreieimpulsoperatorer for to ulike frihetsgrader. Er $\vec{J}_1 - \vec{J}_2$ en dreieimpulsoperator? Begrunn svaret.

b) Deutroner er spinn-1 partikler, og egentilstandene for z-komponenten S_{iz} for spinnet til deutron nr. i betegnes med $\chi_{-1}(i), \chi_0(i)$ og $\chi_1(i)$, slik at

$$S_{iz}\,\chi_m(i) = m\hbar\,\chi_m(i).$$

(En alternativ notasjon for χ_m er $|1, m\rangle$.)

Se på et system av to deutroner. Systemet har en posisjonsbølgefunksjon som er symmetrisk i partikkelposisjonene. Hvilke verdier kan kvantetallet S, knyttet til systemets totalspinn $\vec{S} = \vec{S}_1 + \vec{S}_2$, ha for dette systemet? Begrunn svaret.

c) For to-deuteron-systemet i punkt b bestem spinntilstandsfunksjonen $\Xi_0(12)$ for tilfellet $S = 0$, uttrykt ved énspinntilstandene $\chi_m(i)$ $(i = 1, 2)$. (Dersom du allerede har bestemt den under punkt b, så bare skriv den ned påny.)

Beregn egenverdien til $\vec{S}_1\vec{S}_2$ i denne tilstanden.

Vedlegg: Formler, uttrykk og konstanter

(Noe av dette kan du få bruk for)

Dreieimpulsegenskaper

En vektoroperator $\vec{J}$ er en dreieimpulsoperator når dens kartesiske komponenter oppfyller kommuteringsreglene

$$\begin{aligned}[J_x, J_y] &= i\hbar J_z \\ [J_y, J_z] &= i\hbar J_x \\ [J_z, J_x] &= i\hbar J_y.\end{aligned}$$

Felles egentilstander $|j, m\rangle$ for $\vec{J}^2$ og J_z med egenverdier:

$$\vec{J}^2|j,m\rangle = j(j+1)\hbar^2|j,m\rangle \quad \text{og} \quad J_z|j,m\rangle = m\hbar|j,m\rangle.$$

Stigeoperatorene $J_\pm = J_x \pm iJ_y$ oppfyller

$$J_\pm|j,m\rangle = \hbar\sqrt{j(j+1) - m(m\pm 1)}\,|j,m\pm 1\rangle = \hbar\sqrt{(j\mp m)(j+1\pm m)}\,|j,m\pm 1\rangle.$$

Finstrukturkonstanten

$$\alpha = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0\hbar c} \simeq \frac{1}{137.05}$$

Energi og frekvens

$E = 1\text{eV} = 1.602\cdot 10^{-19}$ J tilsvarer sirkelfrekvensen $\omega = E/\hbar = 1.519\cdot 10^{15}\text{s}^{-1}$.

$kT = 1eV$ for $T = 11600K$.

Coulombpotensialet

De diskrete egenverdiene i Coulombpotensialet $V(r) = -e^2/4\pi\varepsilon_0 r$ er

$$E_n = -\frac{m}{2\hbar^2}\left(\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0}\right)^2\frac{1}{n^2} = -\frac{13.6\text{ eV}}{n^2} \qquad \text{når } m = \text{elektronmassen.}$$

Normerte bølgefunksjoner (med $\rho = r/a_0$)

$$\begin{aligned}\psi_{100} &= (\pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}}\, e^{-\rho} \\ \psi_{200} &= (32\pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}}(2-\rho)\, e^{-\rho/2} \\ \psi_{310} &= \tfrac{2}{81}(2\pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}}(6-\rho)\rho\, e^{-\rho/3}\cos\vartheta \\ \psi_{31\pm 1} &= \tfrac{1}{81}(\pi a_0^3)^{-\frac{1}{2}}(6-\rho)\rho\, e^{-\rho/3}\sin\vartheta e^{\pm i\varphi}\end{aligned}$$

Bohr-radien

$$a_0 = \frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{me^2} = 0.53\text{Å}.$$

Endimensjonal harmonisk oscillator

$$H = \frac{p_x^2}{2m} + \tfrac{1}{2}m\omega^2 x^2$$

har egenverdiene

$$E_n = (n + \tfrac{1}{2})\hbar\omega.$$

Diraclikningen for fri partikkel

$$i\hbar\frac{\partial\Psi}{\partial t} = H\Psi, \quad \text{der} \quad H = c\vec{\alpha}\vec{p} + \beta mc^2.$$

Her er

$$\begin{aligned} \alpha_k\alpha_l + \alpha_l\alpha_k &= 2\delta_{kl} \qquad (k, l = 1, 2, 3) \\ \alpha_k\beta + \beta\alpha_k &= 0 \qquad (k = 1, 2, 3) \\ \beta^2 &= 1 \end{aligned}$$

Integraler

$$\int_0^\infty t^n e^{-t}\,dt = \Gamma(n+1) = n!$$

$$\int_{-\infty}^\infty e^{-x^2}\,dx = \sqrt{\pi}$$

$$\int_0^\pi \sin^n\vartheta\,d\vartheta = \begin{cases} 2 & \text{for} \quad n = 1 \\ \frac{1}{2}\pi & \text{for} \quad n = 2 \\ \frac{4}{3} & \text{for} \quad n = 3 \end{cases}$$