Norges Teknisk Naturvitenskapelige Universitet
Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen:
J.S.Høye, tel 93654

EKSAMEN I FAG 74326 KVANTEMEKANIKK 2
Fredag den 28.november 1997
kl.0900–1400

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Rottmann: Matematisk formelsamling
Barnett and Cronin: Mathematical Formulae
Godkjent kalkulator

Oppgave 1

a) En partikkel befinner seg i det éndimensjonale potensialet $V(x)$. I standard WKB tilnærmelse er da den stasjonære løsningen av Schrödingerlikningen med energi E gitt ved

$$\psi(x) = A \exp(\pm \frac{i}{\hbar} \int^{x} p(y)dy)$$

der

$$p(x) = \sqrt{2m(E-V(x))}\,.$$

Bestem koeffisienten $A=A(x)$ ved å sette inn i Schrödingerlikningen og løse denne slik at feilen i denne er begrenset til ledd av orden $\hbar^2$.

b) For et potensial uten harde vegger er kvantiseringsbetingelsen med WKB–tilnærmelsen

$$2\int_{x_v}^{x_h} p(y)dy = (n-\tfrac{1}{2})h \qquad n=1,2,3,\cdots$$

der x_v og x_h er de klassiske vendepunktene. Forklar kort (uten beregninger) hvordan denne kvantiseringsbetingelsen framkommer.

c) En partikkel beveger seg i "V–profil" potensialet

$$V(x) = \alpha|x|$$

Bestem energiegenverdiene i WKB–tilnærmelsen.

Oppgave 2

a) I ikke–relativistisk strålingsteori forårsakes overganger mellom tilstander i atomære systemer ved ledd i Hamiltonoperatoren som inneholder vekselvirkning mellom ladete partikler og strålingsfeltet. Hvilke typer vekselvirkningsledd kan forekomme når også elektronets magnetiske moment $\vec{\mu}$ inkluderes? Hvilket ledd bidrar i første ordens tidsavhengig perturbasjonsteori?

b) Den spontane overgangssannsynligheten pr. tidsenhet for overgang mellom elektrontilstandene $|i>$ og $|f>$ i et atom eller molekyl slik at et foton med polarisering $e_{k\lambda}$ sendes ut i romvinkelen $d\Omega$, er gitt ved

$$d\Gamma_{i\to f} = \frac{\alpha\omega_{if}^3}{2\pi c^2} |e_{k\lambda}<f|r|i>|^2 \, d\Omega$$

når elektrisk–dipol–tilnærmelsen gjøres. (Her er $\alpha=e^2/4\pi\epsilon_0\hbar c$ finstrukturkonstanten.)

Den spontane overgangssannsynlighet pr. tidsenhet når alle fotonets tilstander (dvs. retning og polarisering) inkluderes blir et uttrykk

$$\omega_{i\to f} = a\omega_{if}^3 |<f|\vec{r}|i>|^2$$

Bestem koeffisienten a.

c) Et elektron med masse m beveger seg som en fri partikkel i området begrenset til $0<z<L$ langs z–aksen. Egentilstandene er da gitt ved

$$\psi_n(z) = \sqrt{\frac{2}{L}} \sin(kz)$$

med egenverdier $E_n = \frac{(\hbar k)^2}{2m}$ der $k = \frac{\pi}{L}n$ med $n = 1,2,3 \cdots$. Mellom 2 tilstander med henholdsvis $n=n_i$ og $n=n_j$ i dette systemet vil det være spontane overganger som angitt under punkt b. Hva er ω_{if} for dette tilfellet?

Beregn overgangssannsynligheten $\omega_{i\to f}$ mellom de 2 tilstandene.

Oppgitt: $\cos(u+v)-\cos(u-v) = -2\sin(u)\sin(v)$.

Oppgave 3

De normerte egentilstandene for z–komponenten S_{iz} for spinnet S_i til partikkel nr. i et system bestående av 2 spinn–1 partikler kan betegnes som $\chi_{-1}(i)$, $\chi_0(i)$ og $\chi_1(i)$ (i=1,2) slik at

$$S_{iz}\,\chi_m(i) = m\hbar\chi_m(i)$$

(Alternativ notasjon for χ_m er $|m>$.)

De 2 partiklene danner et system med totalt spinn $S=S_1+S_2$ der kvantetallet for S^2 er $s=0$. Den tilhørende spinntilstandsfunksjonen $|\psi_0>$ kan uttrykkes ved $\chi_m(i)$ slik at

$$|\psi_0> = \sum_{m_1 m_2} a_{m_1 m_2} |m_1>|m_2>$$

der $|m_1> = \chi_{m_1}(1)$ og $|m_2> = \chi_{m_2}(2)$.

Det er umiddelbart klart at bare 3 av koeffisientene $a_{m_1 m_2}$ er forskjellig fra null. Hvilke 3 koeffisienter er dette? På grunn av symmetri er igjen 2 av disse like slik at en står tilbake med 2 uavhengige koeffisienter som skal bestemmes. Dette kan gjøres ved å anvende S^2 på $|\psi_0>$. Hva blir da normerte egentilstanden $|\psi_0>$?

b) To dreieimpulser vekselvirker med energien

$$H = \alpha\, J_1\, J_2$$

der J_1 og J_2 er 2 (uavhengige) dreieimpulsoperatorer. Bestem energinivåene og deres degenerasjon når kvantetallene j_1 og j_2 for J_1^2 og J_2^2 er gitt (dvs. j_1 og j_2 eller størrelsen på de 2 dreieimpulsene er fast)?

Oppgitt: For en dreieimpulsoperator J gjelder

$J^2|j,m> = j(j+1)\hbar^2|j,m>$ $\quad J_z=|j,m> = m\hbar|j,m>$

der $|j,m>$ er egentilstand.

Stigeoperatorene $J_\pm = J_x \pm iJ_y$ oppfyller

$J_\pm|j,m> = \hbar\sqrt{j(j+1)-m(m\pm1)}\;|j, m\pm1>$.

Oppgave 4

Dirac–likningen for fri partikkel bestemmes ved å "linearisere" Hamiltonoperatoren slik at

$$\sqrt{m^2c^2+p^2} = \alpha\, p + \beta mc$$

Vis at dette medfører

$$\alpha_i\alpha_j + \alpha_j\alpha_i = 2\delta_{ij} \qquad (i,j = 0,1,2,3)$$

der en har definert $\alpha_0 = \beta$ til forenkling.

b) I magnetfelt B blir Hamiltonoperatoren for Dirac–likningen til elektronet

$$H = c\alpha\, D + \beta mc^2$$

med $D = p+eA$ der A er det elektromagnetiske vektorpotensialet som vekselvirker med elektronets magnetiske moment. For å bestemme denne vekselvirkningen kan en sette

$$H = mc^2 + H_0$$

og så se på det ikke–relativistiske tilfellet der $H_0 << mc^2$. Ved å kvadrere og sammenlikne de 2 uttrykkene for H^2 vil en finne den ikke–relativistiske Hamiltonoperatoren

$$H_0 = \frac{1}{2m} D^2 - \mu B\ .$$

Vis dette og bestem elektronets magnetiske moment μ.

Oppgitt: $\alpha_j\alpha_\ell = \frac{2i}{\hbar}\, \epsilon_{j\ell k}\, S_k$ der S er spinnoperatoren for elektronet.

$$p = \frac{\hbar}{i}\nabla\ .$$