UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
GRUPPE FOR TEORETISK FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Prof. Kåre Olaussen
Tlf. 3652

EKSAMEN I FAG 74327 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK
Torsdag 1. juni 1989
Tid: kl. 0900-1300

Tillatte hjelpemidler (Alternativ B):
Godkjent lommekalkulator tillatt
Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Øgrim: Størrelser og enheter i fysikken

Oppgave 1 (Vekselvirkende uladete Klein-Gordon partikler).

En enkel modell for uladete Klein-Gordon (dvs. spinn-0) partikler er definert ved Lagrangetettheten

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - \frac{1}{2}m^2\varphi^2 - g_3\varphi^3 - g_4\varphi^4,$$

der vi har valgt enheter slik at $\hbar = c = 1$.

i) Feynmanreglene for den fri delen av denne modellen er gitt i vedlegget. Angi hvilke vekselvirkningknuter vi vil få med denne Lagrangetettheten, og deres tilhørende algebraiske uttrykk.

I den resterende delen av denne oppgaven skal vi se på 2-partikkel→2-partikkel spredningsprosesser i denne modellen.

ii) La først $g_4 = 0$ og $g_3 \neq 0$. Tegn alle Feynmandiagram for laveste ordens (i g_3) ikke-forsvinnende bidrag til spredningsamplituden, og skriv ned de tilhørende algebraiske uttrykkene.

iii) Når partiklene kolliderer med svært stor totalenergi i massesentersystemet, men med fast impulsoverføring i massesentersystemet, dvs. i grensen $s \to \infty$ med t fast, vil ett av Feynmandiagrammene i pkt.ii) ha det dominerende bidraget til spredningsamplituden. Angi hvilket.

iv) La så $g_3 = 0$ og $g_4 \neq 0$. Tegn alle Feynmandiagram for laveste ordens (i g_4) ikke-forsvinnende bidrag til spredningsamplituden, og skriv ned de tilhørende algebraiske uttrykkene.

v) Finn, til laveste ikke-forsvinnende orden i g_4, det totale spredningstverrsnittet for modellen i pkt.iv). Sammenhengen mellom spredningsamplitude og spredningstverrsnitt er gitt i vedlegget.

Oppgave 2 (QED).

I denne oppgaven er det forutsatt en standard *QED*-modell for fotoner og leptoner.

i) Tegn, der det er mulig, Feynmandiagrammene for laveste ordens bidrag til prosessene

$$e^+e^- \to e^+e^-, \quad e^+e^- \to \mu^+\mu^-, \quad e^+e^- \to \gamma\gamma,$$
$$e^+e^- \to \gamma, \quad e^+\mu^- \to e^+\mu^-, \quad e^+\mu^- \to \gamma\gamma.$$

I de to siste punktene skal du se på prosessen $e^-e^- \to e^-e^-$ til laveste ikke-forsvinnende orden:

ii) Tegn Feynmandiagrammene, og skriv ned de tilhørende algebraiske bidragene til spredningsamplituden.

iii) Det midlere amplitudekvadratet for denne prosessen,

$$\overline{|M_{fi}|^2} = \frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2, s_1', s_2'} |M_{fi}(s_1, s_2; s_1', s_2')|^2,$$

kan reduseres til et algebraisk uttrykk som involverer spor over gamma-matriser. Utfør denne reduksjonen. (Du trenger ikke å beregne sporene).

VEDLEGG TIL EKSAMEN I FAG 74327 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK

Noen av de nedenforstående opplysningene kan muligens være til nytte ved eksamensbesvarelsen.

I. Sammenheng mellom spredningsamplitude og tverrsnitt

For en 2-partikkel → 2-partikkel kollisjonsprosess i massesentersystemet er sammenhengen mellom differensielt spredningstverrsnitt $d\sigma$ og spredningsamplitude M_{fi} gitt ved

$$d^2\sigma = \frac{1}{64\pi^2(p_1^0+p_2^0)^2}\,\frac{p'}{p}\,|M_{fi}|^2\, d^2\Omega,$$

(der $p = |\vec{p}_1|$, $p' = |\vec{p}_1'|$) når man bruker normering og Feynmanregler for M_{fi} som under.

II. Feynmanregler

1. Utgående partikler			2. Innkommende partikler		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^-, \mu^-, \cdots$	$\bullet\!\!-\!\!\!\rightarrow\!\!-\ p,s$	$\bar{u}(p,s)$	$e^-, \mu^-, \cdots$	$p,s\ -\!\!\!\rightarrow\!\!-\!\!\bullet$	$u(p,s)$
$e^+, \mu^+, \cdots$	$\bullet\!\!-\!\!\!\leftarrow\!\!-\ p,s$	$v(p,s)$	$e^+, \mu^+, \cdots$	$p,s\ -\!\!\!\leftarrow\!\!-\!\!\bullet$	$\bar{v}(p,s)$
γ (foton)	$\bullet\!\sim\!\sim\ k,\mu$	$e^\mu(k,s)^*$	γ (foton)	$k,\mu\ \sim\!\sim\!\bullet$	$e^\mu(k,s)$
Uladet spinn−0	$\bullet\!\!-\!\!-\!\!-\ k$	1	Uladet spinn−0	$k\ -\!\!-\!\!-\!\!\bullet$	1

3. Propagatorer			4. Spredningsknuter		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	Teoretisk modell	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^-, \mu^-, \cdots$	$\bullet\!\!\xrightarrow{\ p\ }\!\!\bullet$	$\frac{i(\not p + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$	QED	$\underset{\mu}{\overset{\wr}{\rightarrow\!\bullet\!\rightarrow}}$	$-ie\gamma^\mu$
γ (foton)	$\mu\ \overset{k}{\bullet\!\sim\!\sim\!\bullet}\ \nu$	$\frac{-i\eta^{\mu\nu}}{k^2 - i\epsilon}$	φ^3-teori		
Uladet spinn−0	$\overset{k}{\bullet\!\!-\!\!-\!\!-\!\!\bullet}$	$\frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$	φ^4-teori		

5. Faktor $-i$ for å gå fra S-matrise til amplitude, faktor -1 for hver lukket fermion-sløyfe, relativ faktor -1 mellom diagrammer som adskiller seg ved ombytte av ytre fermion-linjer.

6. $\int \frac{d^4 q_i}{(2\pi)^4}$ for hver firer-impuls q_i som ikke er fiksert ved energi-impuls konservering.

III. Fullstendighetsrelasjoner

$$\sum_{s=1}^{2} u(p,s)_\alpha \bar{u}(p,s)_\beta = (\not{p}+m)_{\alpha\beta}, \qquad \sum_{s=1}^{2} v(p,s)_\alpha \bar{v}(p,s)_\beta = (\not{p}-m)_{\alpha\beta},$$

$$\sum_{s=1}^{2} e^\mu(k,s)\, e^\nu(k,s)^* = -\eta^{\mu\nu} + \textit{irrelevante ledd}.$$

IV. γ-matrisene

1. Eksplisitt representasjon (standard-representasjonen):

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \vec{\alpha} = \gamma^0\vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ \vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$

der Pauli-matrisene er $\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $\sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ og $\sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.

2. Algebraiske relasjoner:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu\gamma^\nu + \gamma^\nu\gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}, \qquad \gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma^\mu = -2\gamma_\lambda, \qquad \gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\sigma\gamma^\mu = 4\eta_{\lambda\sigma},$$

$$\gamma_\mu\gamma_\lambda\gamma_\sigma\gamma_\rho\gamma^\mu = -2\gamma_\rho\gamma_\sigma\gamma_\lambda, \qquad \gamma^0\gamma_\mu^\dagger\gamma^0 = \gamma_\mu.$$

3. Noen spor av gamma-matriser:

$$\mathrm{Tr}\,1 = 4, \qquad \mathrm{Tr}\,\gamma_\mu = 0, \qquad \mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\gamma_\nu = 4\eta_{\mu\nu}, \qquad \mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda = 0,$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma_\mu\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\sigma = 4(\eta_{\mu\nu}\eta_{\lambda\sigma} - \eta_{\mu\lambda}\eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma}\eta_{\nu\lambda}).$$