

Faglig kontakt under eksamen:  
Prof. Kåre Olaussen  
Tlf. 3652

EKSAMEN I FAG 74327 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK

Torsdag 1. juni 1989

Tid: kl. 0900-1300

Tillatte hjelpemidler (Alternativ B):

Godkjent lommekalkulator tillatt

Rottmann: Mathematische Formelsammlung

Øgrim: Størrelser og enheter i fysikken

Oppgave 1 (Vekselvirkende uladete Klein-Gordon partikler).

En enkel modell for uladete Klein-Gordon (dvs. spinn-0) partikler er definert ved Lagrangetettheten

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi)(\partial^\mu \varphi) - \frac{1}{2}m^2 \varphi^2 - g_3 \varphi^3 - g_4 \varphi^4,$$

der vi har valgt enheter slik at  $\hbar = c = 1$ .

i) Feynmanreglene for den fri delen av denne modellen er gitt i vedlegget. Angi hvilke vekselvirkningknuter vi vil få med denne Lagrangetettheten, og deres tilhørende algebraiske uttrykk.

I den resterende delen av denne oppgaven skal vi se på 2-partikkel-2-partikkel spredningsprosesser i denne modellen.

ii) La først  $g_4 = 0$  og  $g_3 \neq 0$ . Tegn alle Feynmandiagram for laveste ordens (i  $g_3$ ) ikke-forsvinnende bidrag til spredningsamplituden, og skriv ned de tilhørende algebraiske uttrykkene.

iii) Når partiklene kolliderer med svært stor totalenergi i massesenter-systemet, men med fast impulsoverføring i massesenter-systemet, dvs. i grensen  $s \rightarrow \infty$  med  $t$  fast, vil ett av Feynmandiagrammene i pkt.ii) ha det dominerende bidraget til spredningsamplituden. Angi hvilket.

- iv) La så  $g_3 = 0$  og  $g_4 \neq 0$ . Tegn alle Feynndiagram for laveste ordens (i  $g_4$ ) ikke-forsvinnende bidrag til spredningsamplituden, og skriv ned de tilhørende algebraiske uttrykkene.
- v) Finn, til laveste ikke-forsvinnende orden i  $g_4$ , det totale spredningstverrsnittet for modellen i pkt.iv). Sammenhengen mellom spredningsamplitude og spredningstverrsnitt er gitt i vedlegget.

### Oppgave 2 (QED).

I denne oppgaven er det forutsatt en standard QED-modell for fotoner og leptoner.

- i) Tegn, der det er mulig, Feynndiagrammene for laveste ordens bidrag til prosessene

$$e^+e^- \rightarrow e^+e^-, \quad e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-, \quad e^+e^- \rightarrow \gamma\gamma,$$

$$e^+e^- \rightarrow \gamma, \quad e^+\mu^- \rightarrow e^+\mu^-, \quad e^+\mu^- \rightarrow \gamma\gamma.$$

I de to siste punktene skal du se på prosessen  $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$  til laveste ikke-forsvinnende orden:

- ii) Tegn Feynndiagrammene, og skriv ned de tilhørende algebraiske bidragene til spredningsamplituden.
- iii) Det midlere amplitudekvadratet for denne prosessen,

$$\overline{|M_{fi}|^2} = \frac{1}{4} \sum_{s_1, s_2, s'_1, s'_2} |M_{fi}(s_1, s_2; s'_1, s'_2)|^2,$$

kan reduseres til et algebraisk uttrykk som involverer spor over gamma-matriser. Utfør denne reduksjonen. (Du trenger ikke å beregne sporene).

**VEDLEGG TIL EKSAMEN I FAG 74327 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK**

Noen av de nedenforstående opplysningene kan muligens være til nytte ved eksamensbesvarelsen.







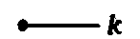
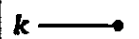
**I. Sammenheng mellom spredningsamplitude og tverrsnitt**

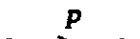


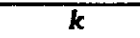
For en 2-partikkel → 2-partikkel kollisjonsprosess i massesentersystemet er sammenhengen mellom differensielt spredningstverrsnitt  $d\sigma$  og spredningsamplitude  $M_{fi}$  gitt ved

$$d^2\sigma = \frac{1}{64\pi^2(p_1^0 + p_2^0)^2} \frac{p'}{p} |M_{fi}|^2 d^2\Omega,$$

(der  $p = |\vec{p}_1|$ ,  $p' = |\vec{p}'_1|$ ) når man bruker normering og Feynmanregler for  $M_{fi}$  som under.

**II. Feynmanregler**

1. Utgående partikler			2. Innkommende partikler		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^-, \mu^-, \dots$		$\bar{u}(p, s)$	$e^-, \mu^-, \dots$		$u(p, s)$
$e^+, \mu^+, \dots$		$v(p, s)$	$e^+, \mu^+, \dots$		$\bar{v}(p, s)$
$\gamma$ (foton)		$e^\mu(k, s)^*$	$\gamma$ (foton)		$e^\mu(k, s)$
Uladet spinn-0		1	Uladet spinn-0		1

3. Propagatorer			4. Spredningsknuter		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	Teoretisk modell	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^-, \mu^-, \dots$		$\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$	QED		$-ie\gamma^\mu$
$\gamma$ (foton)		$\frac{-i\eta^{\mu\nu}}{k^2 - i\epsilon}$	$\phi^3$ -teori		
Uladet spinn-0		$\frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$	$\phi^4$ -teori		

5. Faktor  $-i$  for å gå fra  $S$ -matrise til amplitude, faktor  $-1$  for hver lukket fermion-sløyfe, relativ faktor  $-1$  mellom diagrammer som adskiller seg ved ombytte av ytre fermion-linjer.
6.  $\int \frac{d^4 q_1}{(2\pi)^4}$  for hver firer-impuls  $q_1$  som ikke er fiksert ved energi-impuls konservering.

### III. Fullstendighetsrelasjoner

$$\sum_{s=1}^2 u(p, s)_\alpha \bar{u}(p, s)_\beta = (\not{p} + m)_{\alpha\beta}, \quad \sum_{s=1}^2 v(p, s)_\alpha \bar{v}(p, s)_\beta = (\not{p} - m)_{\alpha\beta},$$

$$\sum_{s=1}^2 e^\mu(k, s) e^\nu(k, s)^* = -\eta^{\mu\nu} + \text{irrelevante ledd.}$$

### IV. $\gamma$ -matrisene

1. Eksplisitt representasjon (standard-representasjonen):

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \bar{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma} \\ -\bar{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \bar{\alpha} = \gamma^0 \bar{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \bar{\sigma} \\ \bar{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta = \gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix},$$

der Pauli-matrisene er  $\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ,  $\sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$  og  $\sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ .

2. Algebraiske relasjoner:

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = \gamma^\mu \gamma^\nu + \gamma^\nu \gamma^\mu = 2\eta^{\mu\nu}, \quad \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma^\mu = -2\gamma_\lambda, \quad \gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\sigma \gamma^\mu = 4\eta_{\lambda\sigma},$$

$$\gamma_\mu \gamma_\lambda \gamma_\sigma \gamma_\rho \gamma^\mu = -2\gamma_\rho \gamma_\sigma \gamma_\lambda, \quad \gamma^0 \gamma_\mu^\dagger \gamma^0 = \gamma_\mu.$$

3. Noen spor av gamma-matriser:

$$\text{Tr } 1 = 4, \quad \text{Tr } \gamma_\mu = 0, \quad \text{Tr } \gamma_\mu \gamma_\nu = 4\eta_{\mu\nu}, \quad \text{Tr } \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda = 0,$$

$$\text{Tr } \gamma_\mu \gamma_\nu \gamma_\lambda \gamma_\sigma = 4(\eta_{\mu\nu} \eta_{\lambda\sigma} - \eta_{\mu\lambda} \eta_{\nu\sigma} + \eta_{\mu\sigma} \eta_{\nu\lambda}).$$