UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Jan Myrheim
Telefon: 3653

Eksamen i fag 74 350 Klassisk feltteori
Tirsdag 30. august 1994
Tid: 09.00–14.00

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ B): Godkjent lommekalkulator.
Rottmann, *Mathematische Formelsammlung.*
Barnett and Cronin, *Mathematical Formulae.*
Øgrim og Lian, *Størrelser og enheter i fysikk og teknikk.*

Nyttige konstanter:
Newtons gravitasjonskonstant: $G = 6,7 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$
Lyshastigheten i vakuum: $c = 3,0 \times 10^8\,\mathrm{m/s}$

Oppgave 1:

a) Forklar kort hva Einsteins ekvivalensprinsipp går ut på, og hvordan det kan testes eksperimentelt (nevn minst en metode).

b) Nevn de tre tidlige ("klassiske") eksperimentelle testene der Einsteins gravitasjonsteori stemte bedre med observasjonene enn Newtons teori.

c) Hvilken klokke går fortest: en klokke som er i ro på jordoverflaten (på sørpolen, slik at jordrotasjonen ikke spiller noen rolle), eller en klokke i en satellitt som går i sirkelbane rundt jorda?

d) Einsteins gravitasjonsligning er

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\,g_{\mu\nu}\,R = \frac{8\pi G}{c^4}\,T_{\mu\nu}\ .$$

Hva står symbolene $R_{\mu\nu}$, $g_{\mu\nu}$, R og $T_{\mu\nu}$ for?
Hvorfor er det andre leddet på venstre side av ligningen nødvendig?
Vis at gravitasjonsligningen i vakuum kan skrives som $R_{\mu\nu} = 0$.

Oppgave 2:

En partikkel med masse m har posisjonen $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ ved tiden t, og vekselvirker med et skalarfelt $\Phi = \Phi(\boldsymbol{r}, t)$. Koblingen til feltet er gitt ved en koblingskonstant (eller "ladning") q. $\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$ er hastigheten til partikkelen, og Lagrangefunksjonen er

$$L = -(mc^2 + q\Phi)\sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}} \ .$$

a) Vis at Hamiltonfunksjonen er

$$H = \sqrt{(mc^2 + q\Phi)^2 + \boldsymbol{p}^2 c^2} \ ,$$

der $\boldsymbol{p}$ er den kanoniske impulsen.

b) I resten av denne oppgaven antar vi at Φ er Yukawa-potensialet,

$$\Phi = \Phi(r) = k\,\frac{\mathrm{e}^{-\lambda r}}{r} \ . \tag{1}$$

Her er k og λ konstanter, med $\lambda \geq 0$, og $r = |\boldsymbol{r}|$ er avstanden fra origo. Hvilke bevaringslover gjelder, og hva er betingelsen for at det kan eksistere bundne tilstander?

c) Finn bevegelsesligningene, både Euler–Lagrange-ligningene og Hamiltons ligninger.
Dersom sirkelbevegelse er mulig, hvordan avhenger perioden av r?

d) Still opp og løs bevegelsesligningen for en bane som avviker lite fra en sirkelbane (sett $\lambda = 0$, hvis det gir en vesentlig forenkling).
Ville en teori av denne typen kunne forklare Merkurs perihelbevegelse?

Oppgave 3:

Et skalarfelt (Klein–Gordon-felt) $\Phi = \Phi(\boldsymbol{r}, t)$ har et annet felt $\rho = \rho(\boldsymbol{r}, t)$ som kilde.
Lagrangetettheten er

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{c^2}\left(\frac{\partial \Phi}{\partial t}\right)^2 - (\nabla\Phi)^2 - \lambda^2\Phi^2\right) - \rho\Phi \; . \tag{2}$$

λ er en ikke-negativ konstant, proporsjonal med massen til feltet Φ.

a) Hva menes med at Φ transformeres som et skalarfelt?

b) Finn feltligningen for Φ som følger av Lagrangetettheten i ligning (2).

c) Regn ut komponentene av den kanoniske energi-impulstensoren

$$T^{\mu\nu} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Phi_{,\nu}}\,\Phi^{,\mu} - g^{\mu\nu}\,\mathcal{L} \; .$$

Er $T^{\mu\nu}$ symmetrisk? Er den bevart? Kommenter gjerne de to svarene.

d) Anta at tettheten ρ er gitt som

$$\rho(\boldsymbol{r}, t) = Q\,\delta^{(3)}(\boldsymbol{r}) \; .$$

(Diracs δ-funksjon i tre dimensjoner defineres ved at

$$\int \mathrm{d}^3\boldsymbol{r}\;\delta^{(3)}(\boldsymbol{r})\,f(\boldsymbol{r}) = f(0)$$

for en vilkårlig funksjon $f = f(\boldsymbol{r})$ som er kontinuerlig i $\boldsymbol{r} = 0$.)
Denne tettheten beskriver en punktladning Q som ligger i ro i origo.
Vis at da er Yukawa-potensialet, gitt i ligning (1), en løsning av feltligningen.
Finn konstanten k.

e) Når er kraften mellom to punktladninger Q og q tiltrekkende, i følge denne teorien, og når er kraften frastøtende?