UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Finn Bakke
Telefon: 93653

**Eksamen i fag 74 350 Klassisk feltteori**
Torsdag 24. august 1995
Tid: 09.00–14.00

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ B): Godkjent lommekalkulator.
Rottmann, *Mathematische Formelsammlung.*
Barnett and Cronin, *Mathematical Formulae.*
Øgrim og Lian, *Størrelser og enheter i fysikk og teknikk.*

| | |
|---|---|
| Noen nyttige konstanter: | |
| Newtons gravitasjonskonstant: | $G = 6{,}673 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}^3\,\mathrm{kg}^{-1}\,\mathrm{s}^{-2}$ |
| Lyshastigheten i vakuum: | $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m/s}$ |
| Permeabiliteten i vakuum: | $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{N/A}^2$ |
| Permittiviteten i vakuum: | $\epsilon_0 = 1/(\mu_0 c^2) = 8{,}854 \times 10^{-12}\,\mathrm{F/m}$ |

## Oppgave 1:

**a)** Hvordan transformeres et elektrisk felt $\boldsymbol{E} = \boldsymbol{E}(\boldsymbol{r}, t)$ under en rotasjon en vinkel $\alpha$ om $x$-aksen?
Vis at Maxwells ligning for det elektriske feltet,

$$\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}\,, \tag{1}$$

der $\rho = \rho(\boldsymbol{r}, t)$ er ladningstettheten, er invariant under denne rotasjonen.

**b)** Under hvilke andre transformasjoner er ligning (1) invariant?

**c)** Gitt at det elektriske feltet $\boldsymbol{E}$ er rotasjonsinvariant om $x$-aksen, hvordan ser det da ut? Angi $x$-, $y$- og $z$-komponentene av $\boldsymbol{E}$ i det mest generelle tilfellet.

## Oppgave 2:

Gitt en statisk og rotasjonssymmetrisk metrikk av formen

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{e}^{2a}\, c^2 \mathrm{d}t^2 - \mathrm{e}^{2b}\,\mathrm{d}r^2 - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right)\ , \tag{2}$$

der $t$ er tiden og $r, \theta, \varphi$ er polarkoordinater, mens $a = a(r)$ og $b = b(r)$ er funksjoner av $r$.
Gitt også et rotasjonssymmetrisk elektromagnetisk felt, ikke nødvendigvis statisk.
Radialkomponentene av henholdsvis det elektriske feltet og den magnetiske flukstettheten er $E_r = E_r(r,t)$ og $B_r = B_r(r,t)$.
Felttensoren $F_{\mu\nu}$ kan skrives som en 2-form:

$$\begin{aligned}\mathbf{F} = \frac{1}{2}\,F_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu \wedge \mathrm{d}x^\nu \ = \quad & E_x\,\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x + E_y\,\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}y + E_z\,\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}z \\ & + B_x\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y + B_y\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z + B_z\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x\ ,\end{aligned}$$

der $E_x, E_y, E_z$ og $B_x, B_y, B_z$ er komponenter av det elektriske feltet og den magnetiske flukstettheten. Sammenhengen mellom koordinatene $x, y, z$ og polarkoordinatene $r, \theta, \varphi$ er at

$$\begin{aligned} x &= r\sin\theta\cos\varphi\ , \\ y &= r\sin\theta\sin\varphi\ , \\ z &= r\cos\theta\ . \end{aligned}$$

**a)** Vis at

$$\mathbf{F} = E_r\,\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}r - B_r\,r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi\ .$$

**b)** De fire kildefrie Maxwell-ligningene sier at den ytrederiverte av felttensoren er lik null:

$$\mathrm{d}\mathbf{F} = \frac{1}{2}\,F_{\mu\nu,\rho}\,\mathrm{d}x^\rho\wedge\mathrm{d}x^\mu\wedge\mathrm{d}x^\nu = 0\ .$$

Vis at for det rotasjonssymmetriske feltet er denne ligningen (for $r > 0$) ekvivalent med ligningene

$$\frac{\partial(r^2 B_r)}{\partial r} = 0\ , \qquad \frac{\partial B_r}{\partial t} = 0\ ,$$

som har løsningen

$$B_r = B_r(r) = \frac{\mu_0 c Q_m}{4\pi r^2}\ .$$

$Q_m$ er en konstant (en magnetisk punktladning i origo).

**c)** Den Hodge-duale av en 2-form $F_{\mu\nu}$ defineres som

$${}^*F_{\alpha\beta} = \frac{1}{2}\,\epsilon_{\kappa\lambda\alpha\beta}\,\sqrt{|g|}\,g^{\kappa\mu}g^{\lambda\nu}F_{\mu\nu}\ .$$

$\epsilon_{\kappa\lambda\alpha\beta}$ er det totalt antisymmetriske Levi–Civita-symbolet.
La den metriske tensoren $g_{\mu\nu}$ og den elektromagnetiske felttensoren $F_{\mu\nu}$ være rotasjonssymmetriske, som gitt ovenfor. Vis at da er

$${}^*\mathbf{F} = -c\,\mathrm{e}^{a+b}\,B_r\,\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}r - \frac{E_r}{c\,\mathrm{e}^{a+b}}\,r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi\ .$$

**d)** Når elektrisk ladning og strømtetthet er null, kan de fire gjenværende Maxwell-ligningene skrives som $\mathrm{d}\,{}^*\mathbf{F} = 0$.
Anta at denne ligningen gjelder for $r > 0$, og finn $E_r(r,t)$ av den.

**e)** Regn ut energi-impulstensoren

$$T_{\mu\nu} = \frac{1}{\mu_0}\left(-g^{\kappa\lambda}\,F_{\kappa\mu}\,F_{\lambda\nu} + \frac{1}{4}\,g_{\mu\nu}\,g^{\kappa\lambda}\,g^{\rho\sigma}\,F_{\kappa\rho}\,F_{\lambda\sigma}\right)$$

for det rotasjonssymmetriske elektromagnetiske feltet, med $g_{\mu\nu}$, $E_r$ og $B_r$ som gitt ovenfor. Vis spesielt at

$$T_{00} = \frac{\mu_0 c^2\,\mathrm{e}^{2a}\,Q^2}{32\pi^2 r^4}$$

for en konstant $Q$. Hva er betydningen av $Q$?

## Oppgave 3:

Einsteins gravitasjonsligning med en kosmologisk konstant $\Lambda$ har formen

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\,T_{\mu\nu}\ . \tag{3}$$

$g_{\mu\nu}$ er den metriske tensoren, $G_{\mu\nu}$ er Einsteins krumningstensor og $T_{\mu\nu}$ er energi-impulstensoren.

**a)** Hvorfor må $\Lambda$ være konstant?

**b)** Gitt en statisk og rotasjonssymmetrisk metrikk som i ligning (2). Da er

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} G_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{22}\sin^2\theta \end{pmatrix},$$

med

$$\begin{aligned} G_{00} &= \frac{\mathrm{e}^{2a}}{r^2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\left(1-\mathrm{e}^{-2b}\right)\right)\ , \\ G_{11} &= \frac{1}{r^2}\left(2ra' + 1 - \mathrm{e}^{2b}\right)\ , \\ G_{22} &= r\,\mathrm{e}^{-2b}\left(ra'' + (1+ra')(a'-b')\right)\ . \end{aligned}$$

Her er $a' = \mathrm{d}a/\mathrm{d}r$, osv.
Anta at metrikken har denne formen, sett inn $T_{\mu\nu}$ for $r > 0$ fra oppgave 2, punkt e), og løs gravitasjonsligningen, ligning (3), for $r > 0$.