UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Jan Myrheim
Telefon: 93653

Eksamen i fag 74 350 Klassisk feltteori
Lørdag 28. januar 1995
Tid: 09.00–14.00

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ B): Godkjent lommekalkulator.
Rottmann, *Mathematische Formelsammlung.*
Barnett and Cronin, *Mathematical Formulae.*
Øgrim og Lian, *Størrelser og enheter i fysikk og teknikk.*

Oppgave 1:

Gitt en rotasjonssymmetrisk metrikk av formen

$$\mathrm{d}s^2 = f_0\, c^2 \mathrm{d}t^2 - f_1\, \mathrm{d}r^2 - f_2 \left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta\, \mathrm{d}\varphi^2\right) ,$$

der $f_0 = f_0(r)$, $f_1 = f_1(r)$ og $f_2 = f_2(r)$ er positive funksjoner av r, og c er lyshastigheten i vakuum.
Anta at tiden t, radien r og vinklene θ og φ alle er funksjoner av en parameter u, og at dette beskriver banen til en punktpartikkel med masse m.
Lagrange-funksjonen til partikkelen er

$$L = -mc\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u} = -mc\sqrt{f_0\, c^2 \left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}u}\right)^2 - f_1 \left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}u}\right)^2 - f_2 \left(\left(\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}u}\right)^2 + \sin^2\theta \left(\frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}u}\right)^2\right)} .$$

a) Hva menes med at virkningsintegralet $S = \int_{u_1}^{u_2} L\, du$ er reparametriseringsinvariant?

b) Finn bevegelsesligningene (Euler–Lagrange-ligningene) for partikkelen.

c) Vis at en partikkel som starter i ekvatorialplanet $\theta = \pi/2$, med en hastighetsvektor i ekvatorialplanet, vil bevege seg hele tiden i dette planet. Hva kan du si om de banene som ikke ligger i ekvatorialplanet?

d) Vis at hvis hastigheten er radiell ved ett tidspunkt, vil den alltid være radiell.

e) Vis at en partikkel som ligger i ro i et gitt øyeblikk, i $r = r_0$, vil bli liggende i ro dersom $f_0'(r_0) = 0$. Hva skjer hvis $f_0'(r_0) > 0$, og hvis $f_0'(r_0) < 0$?

f) Hva er betingelsen for at partikkelen kan bevege seg i en sirkelbane i ekvatorialplanet, altså med $\theta = \pi/2$ og $r = r_0 =$ konstant?
Vis at omløpstiden for en slik bane er

$$T = \frac{2\pi}{c}\sqrt{\frac{f_2'(r_0)}{f_0'(r_0)}}\ .$$

Vis at omkretsen (lengden) av sirkelbanen er $P = 2\pi\sqrt{f_2(r_0)}$.
For en slik sirkelbane kan Keplers tredje lov for planetbevegelse skrives som

$$\frac{T^2}{P^3} = \text{konstant}\ .$$

g) Vi ser nå på en bane med $\theta = \pi/2$ og $r = r_0 + \Delta r$, der r_0 er konstant, mens $\Delta r = \Delta r(\varphi)$ er en liten perturbasjon av sirkelbanen. Til laveste orden i Δr er

$$\frac{\mathrm{d}^2(\Delta r)}{\mathrm{d}\varphi^2} + F(r_0)\,\Delta r = 0\ , \tag{1}$$

med

$$F = \frac{f_2'}{f_1}\left(-\frac{f_0'}{f_0} + \frac{f_0''}{2f_0'} + \frac{f_2'}{f_2} - \frac{f_2''}{2f_2'}\right)\ .$$

(Det kreves ikke bevis!)
Hva er betingelsen for at sirkelbanen $\theta = \pi/2$, $r = r_0$ skal være stabil?
Hvis ligning (1) er bevegelsesligningen for en planet i bane rundt sola, hvor stor er perihelbevegelsen for hvert omløp?

h) Undersøk Schwarzschild-metrikken

$$\mathrm{d}s^2 = \left(1 - \frac{R_M}{r}\right)c^2\mathrm{d}t^2 - \frac{\mathrm{d}r^2}{\left(1 - \frac{R_M}{r}\right)} - r^2\left(\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\!\theta\,\mathrm{d}\varphi^2\right)\ ,$$

der R_M er en konstant (Schwarzschild-radien).
Se på betingelsen for stabile sirkelbaner, Keplers tredje lov, perihelbevegelsen.

i) Undersøk på samme måten en skalar gravitasjonsteori, der gravitasjonspotensialet fra en punktmasse M i origo er et skalarfelt

$$\phi(r) = -\frac{GM}{r} = -\frac{R_M\,c^2}{2r}\ ,$$

og der Lagrange-funksjonen til en partikkel som beveger seg i gravitasjonsfeltet er

$$L = -m(c^2 + \phi(r))\sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}} = -mc^2\left(1 - \frac{R_M}{2r}\right)\sqrt{1 - \frac{\boldsymbol{v}^2}{c^2}}\ .$$

G er Newtons gravitasjonskonstant. $\boldsymbol{v} = \mathrm{d}\boldsymbol{r}/\mathrm{d}t$ er hastigheten til partikkelen.
Hvordan samsvarer denne teorien med observasjoner?

Oppgave 2:

Einsteins gravitasjonsligning med en kosmologisk konstant Λ har formen

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4} T_{\mu\nu} \ . \qquad (2)$$

$g_{\mu\nu}$ er den metriske tensoren, $G_{\mu\nu}$ er Einsteins krumningstensor og $T_{\mu\nu}$ er energi-impulstensoren.

a) Hvorfor må Λ være konstant?

b) En statisk, rotasjonssymetrisk metrikk kan skrives på formen $\mathrm{d}s^2 = g_{\mu\nu}\mathrm{d}x^\mu \mathrm{d}x^\nu$, der $x^0 = ct$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$, $x^3 = \varphi$, og

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \mathrm{e}^{2a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\mathrm{e}^{2b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2\sin^2\theta \end{pmatrix} .$$

$a = a(r)$ og $b = b(r)$ er funksjoner av r. Da er

$$G_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} G_{00} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & G_{11} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & G_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & G_{22}\sin^2\theta \end{pmatrix} ,$$

med

$$\begin{aligned} G_{00} &= \frac{\mathrm{e}^{2a}}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\left(1-\mathrm{e}^{-2b}\right)\right) \ , \\ G_{11} &= \frac{1}{r^2}\left(2ra' + 1 - \mathrm{e}^{2b}\right) \ , \\ G_{22} &= r\,\mathrm{e}^{-2b}\left(ra'' + (1+ra')(a'-b')\right) \ . \end{aligned}$$

Her er $a' = \mathrm{d}a/\mathrm{d}r$, osv. (Igjen kreves ikke bevis!)
Anta at metrikken har denne formen, anta vakuum for $r > 0$, og løs gravitasjonsligningen, ligning (2).

c) Undersøk den løsningen du finner (stikkord: tiltrekning/frastøtning, stabile sirkelbaner, perihelbevegelse, Keplers tredje lov).
Hva kan du si om eventuelle singulariteter?

d) Observasjoner av galakser tyder på at $|\Lambda| \leq 10^{-52}\ \mathrm{m}^{-2}$.
Kan dette gi observerbare effekter i solsystemet?
Størrelsen av solsystemet:
Schwarzschild-radien til sola er 3 km.
Middelavstanden fra sola er 58 millioner km til Merkur og
5 900 millioner km til Pluto.