# Eksamen i klassisk feltteori, fag 74 350, 24. august 1995
# Løsninger

1a) Koordinatene $x, y, z$ transformeres slik:

$$\begin{aligned} x &\mapsto \widehat{x} = x \ , \\ y &\mapsto \widehat{y} = y\cos\alpha - z\sin\alpha \ , \\ z &\mapsto \widehat{y} = y\sin\alpha + z\cos\alpha \ . \end{aligned}$$

Den inverse transformasjonen er en rotasjon en vinkel $-\alpha$:

$$\begin{aligned} \widehat{x} &\mapsto x = \widehat{x} \ , \\ \widehat{y} &\mapsto y = \widehat{y}\cos\alpha + \widehat{z}\sin\alpha \ , \\ \widehat{z} &\mapsto z = -\widehat{y}\sin\alpha + \widehat{z}\cos\alpha \ . \end{aligned}$$

Det roterte feltet $\widetilde{\boldsymbol{E}}$ er definert ved at

$$\begin{aligned} \widetilde{\boldsymbol{E}}_x(\widehat{\boldsymbol{r}}, t) &= E_x(\boldsymbol{r}, t) \ , \\ \widetilde{\boldsymbol{E}}_y(\widehat{\boldsymbol{r}}, t) &= E_y(\boldsymbol{r}, t)\cos\alpha - E_z(\boldsymbol{r}, t)\sin\alpha \ , \\ \widetilde{\boldsymbol{E}}_z(\widehat{\boldsymbol{r}}, t) &= E_y(\boldsymbol{r}, t)\sin\alpha + E_z(\boldsymbol{r}, t)\cos\alpha \ . \end{aligned}$$

Helt eksplisitt er da

$$\begin{aligned} \widetilde{\boldsymbol{E}}_x(x, y, z, t) &= E_x(x, y\cos\alpha + z\sin\alpha, -y\sin\alpha + z\cos\alpha, t) \ , \\ \widetilde{\boldsymbol{E}}_y(x, y, z, t) &= E_y(x, y\cos\alpha + z\sin\alpha, -y\sin\alpha + z\cos\alpha, t)\ \cos\alpha \\ &\quad - E_z(x, y\cos\alpha + z\sin\alpha, -y\sin\alpha + z\cos\alpha, t)\ \sin\alpha \ , \\ \widetilde{\boldsymbol{E}}_z(x, y, z, t) &= E_y(x, y\cos\alpha + z\sin\alpha, -y\sin\alpha + z\cos\alpha, t)\ \sin\alpha \\ &\quad + E_z(x, y\cos\alpha + z\sin\alpha, -y\sin\alpha + z\cos\alpha, t)\ \cos\alpha \ . \end{aligned}$$

Ladningstettheten transformeres som en skalar under rotasjon, det vil si at

$$\widetilde{\rho}(x, y, z, t) = \rho(x, y\cos\alpha + z\sin\alpha, -y\sin\alpha + z\cos\alpha, t) \ .$$

Når vi bruker ligningen $\nabla \cdot \boldsymbol{E} = \rho/\epsilon_0$, finner vi at

$$\nabla \cdot \widetilde{\boldsymbol{E}} = \frac{\widetilde{\rho}}{\epsilon_0} \ .$$

Dette betyr, pr. definisjon, at ligningen er invariant under rotasjonen.

1b) Andre transformasjoner som lar ligningen invariant:

- vilkårlige rotasjoner, og vilkårlige translasjoner i rom og tid,
- rominversjon og tidsreversjon,
- ladningskonjugasjon ($\boldsymbol{E} \mapsto -\boldsymbol{E}$, $\rho \mapsto -\rho$).

Men ikke generelle Lorentz-transformasjoner, så lenge vi ikke involverer de tre Maxwell-ligningene med komponentene av strømtettheten som kilder.

1c) Betingelsen for at det elektriske feltet $\boldsymbol{E}$ er rotasjonsinvariant om $x$-aksen er, med $\boldsymbol{E}$ og $\widetilde{\boldsymbol{E}}$ som definert ovenfor, at $\widetilde{\boldsymbol{E}} = \boldsymbol{E}$. Dette skal gjelde for en vilkårlig rotasjonsvinkel $\alpha$. Definer $u = \sqrt{y^2 + z^2}$. Det mest generelle feltet som er rotasjonsivariant om $x$-aksen har formen

$$\begin{aligned} E_x &= f(x,u,t) \ , \\ E_y &= g(x,u,t)\, y - h(x,u,t)\, z \ , \\ E_z &= h(x,u,t)\, y + g(x,u,t)\, z \ , \end{aligned}$$

der $f$, $g$ og $h$ er vilkårlige funksjoner.

2a) Rotasjonssymmetrien av feltet betyr at

$$\begin{aligned} E_x &= E_r\,\frac{x}{r} = E_r \sin\theta\cos\varphi \ , \\ E_y &= E_r\,\frac{y}{r} = E_r \sin\theta\sin\varphi \ , \\ E_z &= E_r\,\frac{z}{r} = E_r \cos\theta \ , \end{aligned}$$

og tilsvarende for $B_x$, $B_y$ og $B_z$. Videre er

$$\begin{aligned} \mathrm{d}x &= \sin\theta\cos\varphi\,\mathrm{d}r + r\cos\theta\cos\varphi\,\mathrm{d}\theta - r\sin\theta\sin\varphi\,\mathrm{d}\varphi \ , \\ \mathrm{d}y &= \sin\theta\sin\varphi\,\mathrm{d}r + r\cos\theta\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta + r\sin\theta\cos\varphi\,\mathrm{d}\varphi \ , \\ \mathrm{d}z &= \cos\theta\,\mathrm{d}r - r\sin\theta\,\mathrm{d}\theta \ . \end{aligned}$$

Følgelig er

$$\begin{aligned} \mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y &= r\sin\varphi\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta + r\sin\theta\cos\theta\cos\varphi\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\varphi - r^2\sin^2\!\theta\cos\varphi\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi \ , \\ \mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z &= -r\cos\varphi\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta + r\sin\theta\cos\theta\sin\varphi\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\varphi - r^2\sin^2\!\theta\sin\varphi\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi \ , \\ \mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x &= -r\sin^2\!\theta\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\varphi - r^2\sin\theta\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi \ , \end{aligned}$$

Det gir at

$$E_x\,\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}x + E_y\,\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}y + E_z\,\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}z = \mathrm{d}t\wedge(E_x\mathrm{d}x + E_y\mathrm{d}y + E_z\mathrm{d}z) = E_r\,\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}r \ .$$

og at

$$B_x\,\mathrm{d}z\wedge\mathrm{d}y + B_y\,\mathrm{d}x\wedge\mathrm{d}z + B_z\,\mathrm{d}y\wedge\mathrm{d}x = -B_r\,r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi \ .$$

Som det skulle vises.

2b) Når $\mathbf{F} = E_r\,\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}r - B_r\,r^2\sin\theta\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi$, så er

$$\begin{aligned} \mathrm{d}\mathbf{F} &= \frac{\partial E_r}{\partial r}\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}r + \frac{\partial E_r}{\partial t}\,\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}r - \frac{\partial(B_r\,r^2)}{\partial r}\,\sin\theta\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi \\ &\quad -\frac{\partial B_r}{\partial t}\,r^2\sin\theta\,\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi - B_r\,r^2\cos\theta\,\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi \\ &= \frac{\partial(B_r\,r^2)}{\partial r}\,\sin\theta\,\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi - \frac{\partial B_r}{\partial t}\,r^2\sin\theta\,\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}\theta\wedge\mathrm{d}\varphi \ . \end{aligned}$$

F.eks. er $\mathrm{d}r\wedge\mathrm{d}t\wedge\mathrm{d}r = 0$, fordi ytreproduktet "$\wedge$" mellom 1-formene $\mathrm{d}r$ og $\mathrm{d}t$ er antisymmetrisk. Vi ser at ligningen $\mathrm{d}\mathbf{F} = 0$ har de to ikke-trivielle komponentene

$$\frac{\partial(B_r\,r^2)}{\partial r} = 0 \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial B_r}{\partial t} = 0 \ .$$

2c) Med koordinatene $x^0 = ct$, $x^1 = r$, $x^2 = \theta$ og $x^3 = \varphi$ har vi fire komponenter av $F_{\mu\nu}$ som ikke er lik null, nemlig:

$$F_{01} = -F_{10} = \frac{E_r}{c} \ , \qquad F_{23} = -F_{32} = -B_r \, r^2 \sin\theta \ .$$

Den metriske tensoren er

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{2a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{2b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} ,$$

med determinant $g = -e^{2(a+b)} \, r^4 \sin^2\theta$, og den inverse matrisen er

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} e^{-2a} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -e^{-2b} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/(r^2 \sin^2\theta) \end{pmatrix} .$$

Med definisjonen $F^{\kappa\lambda} = g^{\kappa\mu} g^{\lambda\nu} F_{\mu\nu}$ har vi at

$$F^{01} = -F^{10} = g^{00} g^{11} F_{01} = -\frac{E_r}{c \, e^{2(a+b)}} \ , \qquad F^{23} = -F^{32} = g^{22} g^{33} F_{23} = -\frac{B_r}{r^2 \sin\theta} \ .$$

Den duale tensoren ${}^*F_{\mu\nu}$ har også fire komponenter som ikke er null, nemlig:

$${}^*F_{01} = -\,{}^*F_{10} = \frac{1}{2} \sqrt{|g|} \, (F^{23} - F^{32}) = -e^{a+b} \, B_r \ ,$$

og

$${}^*F_{23} = -\,{}^*F_{32} = \frac{1}{2} \sqrt{|g|} \, (F^{01} - F^{10}) = -\frac{E_r}{c \, e^{a+b}} \, r^2 \sin\theta \ .$$

Dette gir den oppgitte formelen for ${}^*\mathbf{F}$.

2d) Når vi sammenligner med ligningen $d\mathbf{F} = 0$, ser vi at ligningen $d\,{}^*\mathbf{F} = 0$ er ekvivalent med de to ligningene

$$\frac{\partial}{\partial r} \frac{E_r \, r^2}{e^{a+b}} = 0 \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial E_r}{\partial t} = 0 \ .$$

Løsningen har formen

$$E_r = E_r(r) = \frac{e^{a+b} \, Q_e}{4\pi\epsilon_0 \, r^2} = \frac{\mu_0 c^2 \, e^{a+b} \, Q_e}{4\pi r^2} \ ,$$

der $Q_e$ er en konstant som representerer en elektrisk punktladning i origo.

2e) En rask sjekk viser at $T_{\mu\nu}$ er diagonal.
Da står det igjen å beregne diagonalelementene. Definer

$$\begin{aligned} \mathcal{F} &= \frac{1}{4} \, g^{\kappa\lambda} g^{\rho\sigma} F_{\kappa\rho} F_{\lambda\sigma} = \frac{1}{2} \left( g^{00} g^{11} (F_{01})^2 + g^{22} g^{33} (F_{23})^2 \right) \\ &= \frac{1}{2} \left( -\frac{e^{-2(a+b)} \, {E_r}^2}{c^2} + {B_r}^2 \right) = \frac{{\mu_0}^2 c^2 (-{Q_e}^2 + {Q_m}^2)}{32\pi^2 \, r^4} \ . \end{aligned}$$

Vi har at

$$T_{00} = \frac{1}{\mu_0} \left( -g^{11} (F_{10})^2 + g_{00}\, \mathcal{F} \right) = \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{\mathrm{e}^{-2b}\, {E_r}^2}{c^2} + \mathrm{e}^{2a}\, {B_r}^2 \right) = \frac{\mu_0 c^2\, \mathrm{e}^{2a}\, Q^2}{32\pi^2\, r^4} \ ,$$

der vi har definert $Q^2 = {Q_m}^2 + {Q_e}^2$.
$Q$ er så å si den "totale" ladningen, magnetisk og elektrisk tilsammen.
Videre er

$$T_{11} = \frac{1}{\mu_0} \left( -g^{00} (F_{01})^2 + g_{11}\, \mathcal{F} \right) = \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{-\mathrm{e}^{-2a}\, {E_r}^2}{c^2} - \mathrm{e}^{2b}\, {B_r}^2 \right) = -\frac{\mu_0 c^2\, \mathrm{e}^{2b}\, Q^2}{32\pi^2\, r^4} \ .$$

Det tredje diagonalelementet er

$$T_{22} = \frac{1}{\mu_0} \left( -g^{33} (F_{32})^2 + g_{22}\, \mathcal{F} \right) = \frac{1}{2\mu_0} \left( \frac{r^2\, \mathrm{e}^{-2(a+b)}\, {E_r}^2}{c^2} + r^2 {B_r}^2 \right) = \frac{\mu_0 c^2 Q^2}{32\pi^2\, r^2} \ .$$

Og det fjerde er

$$T_{33} = \frac{1}{\mu_0} \left( -g^{22} (F_{23})^2 + g_{33}\, \mathcal{F} \right) = T_{22} \sin^2\theta \ .$$

Som en kontroll har vi at

$$g^{\mu\nu} T_{\mu\nu} = g^{00} T_{00} + g^{11} T_{11} + g^{22} T_{22} + g^{33} T_{33} = 0 \ .$$

3a) Flytt begge indeksene opp, og skriv gravitasjonsligningen, ligning (2), som

$$G^{\mu\nu} - \Lambda g^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\, T^{\mu\nu} \ .$$

Ta så den kovariante divergensen av denne ligningen. Det gir at

$$G^{\mu\nu}{}_{;\nu} - \Lambda_{,\nu} g^{\mu\nu} - \Lambda g^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\, T^{\mu\nu}{}_{;\nu} \ .$$

Men $G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, pga. Bianchi-identiteten.
Videre er $g^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, fordi metrikken er kovariant konstant, pr. definisjon.
Og endelig er $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, fordi energi og impuls er bevart.
Av det følger at $\Lambda_{,\nu} g^{\mu\nu} = 0$, og derfor $\Lambda_{,\nu} = 0$, som er det samme som at $\Lambda$ er konstant.

3b) Ligningen

$$G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\, T_{\mu\nu} \qquad \text{for } r > 0$$

har 16 komponenter, men bare tre av dem er ikke-trivielle, nemlig:
$\mu = \nu = 0$, $\mu = \nu = 1$ og $\mu = \nu = 2$.
Ta først $\mu = \nu = 0$:

$$\frac{\mathrm{e}^{2a}}{r^2} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left( r \left( 1 - \mathrm{e}^{-2b} \right) \right) - \Lambda \mathrm{e}^{2a} = \frac{8\pi G}{c^4}\, \frac{\mu_0 c^2\, \mathrm{e}^{2a}\, Q^2}{32\pi^2\, r^4} = \frac{K\, \mathrm{e}^{2a}}{r^4} \ ,$$

der $K$ er en positiv konstant. En enkel omforming gir ligningen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r} \left( r \left( 1 - \mathrm{e}^{-2b} \right) \right) - \Lambda r^2 = \frac{K}{r^2} \ ,$$

med løsningen

$$r\left(1-\mathrm{e}^{-2b}\right)-\frac{\Lambda r^3}{3}=-\frac{K}{r}+R_M\ ,$$

der $R_M$ er en integrasjonskonstant. Her står det at

$$\mathrm{e}^{-2b}=1-\frac{R_M}{r}+\frac{K}{r^2}-\frac{\Lambda r^2}{3}\ .$$

Så til $\mu=\nu=1$:

$$\frac{1}{r^2}\left(2ra'+1-\mathrm{e}^{2b}\right)+\Lambda\mathrm{e}^{2b}=-\frac{K\,\mathrm{e}^{2b}}{r^4}\ .$$

Innsatt for $\mathrm{e}^{2b}$ gir det at

$$2a'=\mathrm{e}^{2b}\left(\frac{1-\mathrm{e}^{-2b}}{r}-\frac{K}{r^3}-\Lambda r\right)=\frac{\frac{R_M}{r^2}-\frac{2K}{r^3}-\frac{2\Lambda r}{3}}{1-\frac{R_M}{r}+\frac{K}{r^2}-\frac{\Lambda r^2}{3}}\ .$$

Denne ligningen kan integreres direkte, og gir at

$$2a=2a_0+\ln\left(1-\frac{R_M}{r}+\frac{K}{r^2}-\frac{\Lambda r^2}{3}\right),$$

der $a_0$ er en integrasjonskonstant. Vi kan like gjerne sette $a_0=0$, siden dette bare betyr at vi fikserer tidsskalaen. Det gir at

$$\mathrm{e}^{2a}=\mathrm{e}^{-2b}=1-\frac{R_M}{r}+\frac{K}{r^2}-\frac{\Lambda r^2}{3}\ .$$

Dermed er metrikken bestemt. Det gjenstår å verifisere ligningen for $\mu=\nu=2$:

$$r\mathrm{e}^{-2b}\left(ra''+(1+ra')(a'-b')\right)+\Lambda r^2=\frac{K}{r^2}\ .$$

Vi kjenner $a'$, og finner at

$$\begin{aligned}
ra'' &= \frac{-\frac{R_M}{r^2}+\frac{3K}{r^3}-\frac{\Lambda r}{3}}{1-\frac{R_M}{r}+\frac{K}{r^2}-\frac{\Lambda r^2}{3}}-\frac{\frac{r}{2}\left(\frac{R_M}{r^2}-\frac{2K}{r^3}-\frac{2\Lambda r}{3}\right)^2}{\left(1-\frac{R_M}{r}+\frac{K}{r^2}-\frac{\Lambda r^2}{3}\right)^2}\\
&= \frac{-\frac{R_M}{r^2}+\frac{3K}{r^3}-\frac{\Lambda r}{3}}{1-\frac{R_M}{r}+\frac{K}{r^2}-\frac{\Lambda r^2}{3}}-2r(a')^2\ .
\end{aligned}$$

Dessuten er $b=-a$, slik at

$$ra''+(1+ra')(a'-b')=ra''+2a'+2r(a')^2=\frac{\frac{K}{r^3}-\Lambda r}{1-\frac{R_M}{r}+\frac{K}{r^2}-\frac{\Lambda r^2}{3}}\ .$$

Følgelig er, som vi skulle vise,

$$r\mathrm{e}^{-2b}\left(ra''+(1+ra')(a'-b')\right)=\frac{K}{r^2}-\Lambda r^2\ .$$