Eksamen i klassisk feltteori, fag 74 350, 28. januar 1995. Løsninger.

1a) Det menes at integralet

$$S = \int_{u_1}^{u_2} L\,\mathrm{d}u = -mc\int_{u_1}^{u_2} \frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}u}\,\mathrm{d}u = -mc\int_{s_1}^{s_2} \mathrm{d}s = -mc\,(s_2 - s_1)$$

med $s_1 = s(u_1)$ og $s_2 = s(u_2)$, er uavhengig av hvordan vi velger kurveparameteren u. Sagt mer utførlig: Vi kan velge en annen parameter $\widetilde{u} = \widetilde{u}(u)$ og definere

$$\widetilde{L} = -mc\,\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}\widetilde{u}} = L\,\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}\widetilde{u}}\ .$$

Da er

$$\widetilde{S} = \int_{\widetilde{u}_1}^{\widetilde{u}_2} \widetilde{L}\,\mathrm{d}\widetilde{u} = \int_{u_1}^{u_2} L\,\mathrm{d}u = S\ .$$

1b) La generelt $\dot{x} = \mathrm{d}x/\mathrm{d}u$, og la

$$w = \dot{s} = -\frac{L}{mc} = \sqrt{f_0\,c^2\,\dot{t}^2 - f_1\,\dot{r}^2 - f_2\,(\dot{\theta}^2 + \sin^2\!\theta\ \dot{\varphi}^2)}\ .$$

Vi har fire Euler–Lagrange-ligninger av formen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{\partial w}{\partial \dot{x}^\mu}\right) - \frac{\partial w}{\partial x^\mu} = 0\ ,$$

der $x^\mu = (t, r, \theta, \varphi)$. Merk at t og φ er sykliske variable, dvs. at

$$\frac{\partial L}{\partial t} = \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0\ .$$

De fire ligningene, eksplisitt skrevet ut, er:

$$\begin{aligned}
&\text{(I)} && \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(\frac{f_0\,c^2\,\dot{t}}{w}\right) = 0\ ,\\
&\text{(II)} && \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(-\frac{f_1\,\dot{r}}{w}\right) - \frac{f_0'\,c^2\,\dot{t}^2 - f_1'\,\dot{r}^2 - f_2'\,(\dot{\theta}^2 + \sin^2\!\theta\ \dot{\varphi}^2)}{2w} = 0\ ,\\
&\text{(III)} && \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(-\frac{f_2\,\dot{\theta}}{w}\right) + \frac{f_2\ \sin\theta\cos\theta\ \dot{\varphi}^2}{w} = 0\ ,\\
&\text{(IV)} && \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}u}\left(-\frac{f_2\sin^2\!\theta\,\dot{\varphi}}{w}\right) = 0\ .
\end{aligned}$$

De gir umiddelbart to integrasjonskonstanter A og B slik at

$$\begin{aligned}
&\text{(I a)} && \dot{t} = \frac{wA}{f_0\,c^2}\ ,\\
&\text{(IV a)} && \dot{\varphi} = -\frac{wB}{f_2\sin^2\!\theta}\ .
\end{aligned}$$

1c) Anta at $\theta = \pi/2$ og $\dot{\theta} = 0$ for en gitt parameterverdi $u = u_0$.
Setter vi inn i ligning (III), får vi at

$$\text{(III a)} \qquad -\frac{f_2\,\ddot{\theta}}{w} = 0 \qquad \text{ved } u = u_0\ .$$

Siden det forutsettes i oppgaven at $f_2 > 0$, så må da $\ddot{\theta} = 0$ ved $u = u_0$.
Ved å derivere ligning (III) finner vi videre at

$$\text{(III b)} \qquad -\frac{f_2}{w}\,\frac{\mathrm{d}^3\theta}{\mathrm{d}u^3} = 0 \qquad \text{ved } u = u_0\ .$$

Følgelig er $\mathrm{d}^3\theta/\mathrm{d}u^3 = 0$ ved $u = u_0$. Ved å derivere en gang til finner vi at den fjerdeordens deriverte er null ved $u = u_0$. Og så videre. Følgelig må $\theta = \pi/2$ for alle u.
Vi kan forøvrig kontrollere ved innsetting at ligning (III) er oppfylt hvis $\theta = \pi/2$ for alle u.
Enhver bane som ikke ligger i ekvatorialplanet, kan roteres slik at ett vilkårlig punkt på banen, og hastighetsvektoren i dette punktet, ligger i ekvatorialplanet. Den roterte banen oppfyller den samme bevegelsesligningen som den opprinnelige banen, fordi metrikken er rotasjonsinvariant. I følge det vi nettopp viste, må dermed hele den roterte banen bli liggende i ekvatorialplanet.
Spesielt viser det at en hvilken som helst bane (underforstått: som oppfyller bevegelsesligningen) må være plan.
Dette resultatet kan også vises på en annen måte. Rotasjonsinvariansen fører nemlig til at impulsmomentet (dreieimpulsen) er bevart. Siden impulsmomentet $\boldsymbol{L}$ er en vektor proporsjonal med $\boldsymbol{r} \times \dot{\boldsymbol{r}}$, der $\boldsymbol{r}$ er posisjonsvektoren, så er $\boldsymbol{r}$ vinkelrett på den konstante vektoren $\boldsymbol{L}$, og det betyr at banen ligger i et plan gjennom origo.

1d) Dette er et lignende resonnement som i forrige punkt. Vi antar at $\dot{\theta} = \dot{\varphi} = 0$ ved $u = u_0$. Ligning (IV a) gir at $B = 0$, og følgelig $\dot{\varphi} = 0$ for alle u. Innsatt i ligning (III) gir det at $f_2\,\dot{\theta}/w$ er en bevegelseskonstant, som må være null fordi den er null ved $u = u_0$. Følgelig må $\dot{\theta} = 0$ for alle u.
Her kan vi også resonnere med rotasjonsinvariansen. Hvis hastigheten ved ett tidspunkt er rent radiell, er det umulig at partikkelen kan få en akselerasjon i en eller annen retning vinkelrett på radialretningen. Alle ikke-radielle retninger er nemlig likeverdige, pga. rotasjonsinvariansen.

1e) Anta at $\dot{r} = \dot{\theta} = \dot{\varphi} = 0$ ved $u = u_0$. Ligning (II) gir da at

$$\text{(II a)} \qquad -\frac{f_1\,\ddot{r}}{w} - \frac{f_0'\,c^2\,\dot{t}^2}{2w} = 0 \qquad \text{ved } u = u_0\ .$$

Det betyr at

$$\ddot{r} = -\frac{f_0'\,c^2\,\dot{t}^2}{2f_1} \qquad \text{ved } u = u_0\ .$$

Siden $f_1 > 0$ (som oppgitt), fins det tre muligheter:
– hvis $f_0'(r_0) = 0$, vil $\ddot{r} = 0$ ved $u = u_0$, og partikkelen blir liggende i ro;
– hvis $f_0'(r_0) > 0$, vil $\ddot{r} < 0$ ved $u = u_0$, og partikkelen vil begynne å bevege seg innover mot origo (den tiltrekkes);
– hvis $f_0'(r_0) < 0$, vil $\ddot{r} > 0$ ved $u = u_0$, og partikkelen vil begynne å bevege seg utover fra origo (den frastøtes).

1f) Anta at $\theta = \pi/2$, da er ligning (III) oppfylt. Anta videre at $r = r_0$, da sier ligning (II) at

$$\text{(II b)} \qquad f_0'(r_0)\, c^2\, \dot{t}^2 - f_2'(r_0)\, \dot{\varphi}^2 = 0 \ .$$

En nødvendig betingelse for at denne ligningen kan løses (med $\dot{t} \neq 0$), er at $f_0'(r_0)$ og $f_2'(r_0)$ har samme fortegn.
Dette er også en tilstrekkelig betingelse. Ligningene (I) og (IV) løses nemlig av (I a) og (IV a), og vi kan løse ligning (II b) bare ved å velge konstantene A og B på passende måte (det avgjørende er forholdet A/B).
Ligning (II b) gir at

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\varphi} = \frac{\dot{t}}{\dot{\varphi}} = \pm\frac{1}{c}\sqrt{\frac{f_2'(r_0)}{f_0'(r_0)}} \ ,$$

forutsatt at $f_2'(r_0)/f_0'(r_0) > 0$. Derfor er omløpstiden

$$T = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \left|\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\varphi}\right| = \frac{2\pi}{c}\sqrt{\frac{f_2'(r_0)}{f_0'(r_0)}} \ .$$

For å beregne omkretsen av en sirkel setter vi $t =$ konstant, $\theta = \pi/2$ og $r = r_0 =$ konstant. Da er

$$\mathrm{d}s^2 = -f_2(r_0)\, \mathrm{d}\varphi^2 \ .$$

Omkretsen er altså

$$P = \int_{\varphi=0}^{\varphi=2\pi} \sqrt{|\mathrm{d}s^2|} = \int_0^{2\pi} \sqrt{f_2(r_0)}\, \mathrm{d}\varphi = 2\pi\sqrt{f_2(r_0)} \ .$$

1g) Siden $F(r_0)$ er konstant, har ligning (1) i oppgaveteksten den generelle løsningen

$$\Delta r = C_+ \mathrm{e}^{D\varphi} + C_- \mathrm{e}^{-D\varphi} \ ,$$

der C_+ og C_- er integrasjonskonstanter, og $D^2 = -F(r_0)$.
Hvis $F(r_0) < 0$, er sirkelbanen ustabil, fordi det da finnes en løsning for Δr som vokser eksponentielt, nemlig $\Delta r = C_+ \mathrm{e}^{D\varphi}$, med $D = \sqrt{-F(r_0)}$.
Hvis $F(r_0) > 0$, er sirkelbanen stabil, fordi begge eksponensialfunksjonene $\mathrm{e}^{D\varphi}$ og $\mathrm{e}^{-D\varphi}$ da er oscillerende.
Anta nå at $F(r_0) > 0$. Fra ett perihelpunkt til det neste øker vinkelen φ med $\Delta\varphi$, slik at $\sqrt{F(r_0)}\,\Delta\varphi = 2\pi$. Perihelbevegelsen pr. omløp (fra ett perihelpunkt til det neste) er da

$$\Delta\varphi - 2\pi = 2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{F(r_0)}} - 1\right) .$$

1h) Her er

$$f_0 = \frac{1}{f_1} = 1 - \frac{R_M}{r} \ , \qquad f_2 = r^2 \ .$$

Vi har at

$$f_0' = \frac{R_M}{r^2} > 0$$

(forutsatt at $R_M > 0$), og det betyr at en partikkel i ro tiltrekkes (innover mot origo). Vi har videre at

$$\begin{aligned}
F &= 2r\left(1-\frac{R_M}{r}\right)\left(-\frac{\frac{R_M}{r^2}}{1-\frac{R_M}{r}}+\frac{-\frac{2R_M}{r^3}}{2\frac{R_M}{r^2}}+\frac{2}{r}-\frac{1}{2r}\right) \\
&= 2r\left(1-\frac{R_M}{r}\right)\left(-\frac{\frac{R_M}{r^2}}{1-\frac{R_M}{r}}+\frac{1}{2r}\right) \\
&= 1-\frac{3R_M}{r} \ .
\end{aligned}$$

Stabile sirkelbaner eksisterer for $F > 0$, altså for $r > 3R_M$.
For å undersøke om Keplers tredje lov holder for en sirkelbane med $r = r_0$, beregner vi kvadratet av omløpstiden,

$$T^2 = \frac{4\pi^2 f_2'(r_0)}{c^2 f_0'(r_0)} = \frac{8\pi^2 {r_0}^3}{c^2 R_M} \ .$$

Omkretsen er $P = 2\pi\sqrt{f_2(r_0)} = 2\pi r_0$. Altså er

$$\frac{T^2}{P^3} = \frac{1}{\pi c^2 R_M} = \text{ konstant } .$$

Keplers tredje lov holder faktisk eksakt i dette tilfellet.
Perihelbevegelsen pr. omløp er

$$2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{F(r_0)}}-1\right) \approx \frac{3\pi R_M}{r_0} \ ,$$

som er Einsteins resultat, og som stemmer med observasjoner i solsystemet.

1i) Velger vi som parameter $u = t$, så svarer dette til at

$$\begin{aligned}
f_0 &= f_1 = \left(1-\frac{R_M}{2r}\right)^2 = 1-\frac{R_M}{r}+\frac{{R_M}^2}{4r^2} \ , \\
f_2 &= r^2\left(1-\frac{R_M}{2r}\right)^2 = r^2 - R_M\, r + \frac{{R_M}^2}{4} \ .
\end{aligned}$$

Det gir at

$$f_0' = \frac{R_M}{r^2}\left(1-\frac{R_M}{2r}\right) = \frac{R_M}{r^2}-\frac{{R_M}^2}{2r^3} \ .$$

For $r > R_M/2$ er $f_0' > 0$, dvs. at en partikkel i ro tiltrekkes mot origo.
Vi har videre at

$$f_0'' = -\frac{2R_M}{r^3}+\frac{3{R_M}^2}{2r^4} = \frac{R_M}{r^3}\left(-2+\frac{3R_M}{2r}\right) \ .$$

Og dermed at

$$
\begin{aligned}
F &= \frac{2r - R_M}{\left(1 - \frac{R_M}{2r}\right)^2}\left(-\frac{\frac{R_M}{r^2}}{1 - \frac{R_M}{2r}} + \frac{\frac{1}{r}\left(-2 + \frac{3R_M}{2r}\right)}{2\left(1 - \frac{R_M}{2r}\right)} + \frac{2r - R_M}{r^2\left(1 - \frac{R_M}{2r}\right)^2} - \frac{1}{2r - R_M}\right) \\
&= \frac{4r^2}{2r - R_M}\left(-\frac{2R_M}{r(2r - R_M)} + \frac{-4r + 3R_M}{2r(2r - R_M)} + \frac{3}{2r - R_M}\right) \\
&= \frac{2r}{2r - R_M} = \frac{1}{1 - \frac{R_M}{2r}} \; .
\end{aligned}
$$

Stabile sirkelbaner eksisterer for $F > 0$, dvs. for $r > R_M/2$.
Perihelbevegelsen pr. omløp er

$$
2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{F(r_0)}} - 1\right) \approx -\frac{\pi R_M}{2r_0} \; .
$$

Denne siste forutsigelsen stemmer absolutt ikke med observasjoner i solsystemet.
Til og med fortegnet er galt!

2a) Flytt begge indeksene opp, og skriv gravitasjonsligningen, ligning (2), som

$$
G^{\mu\nu} - \Lambda g^{\mu\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\, T^{\mu\nu} \; .
$$

Ta så den kovariante divergensen av denne ligningen. Det gir at

$$
G^{\mu\nu}{}_{;\nu} - \Lambda_{,\nu} g^{\mu\nu} - \Lambda g^{\mu\nu}{}_{;\nu} = \frac{8\pi G}{c^4}\, T^{\mu\nu}{}_{;\nu} \; .
$$

Men $G^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, pga. Bianchi-identiteten.
Videre er $g^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, fordi metrikken er kovariant konstant, pr. definisjon.
Og endelig er $T^{\mu\nu}{}_{;\nu} = 0$, fordi energi og impuls er bevart.
Av det følger at $\Lambda_{,\nu} g^{\mu\nu} = 0$, og derfor $\Lambda_{,\nu} = 0$, som er det samme som at Λ er konstant.

2b) Det antas her at $T_{\mu\nu} = 0$ for $r > 0$. Ligningen

$$
G_{\mu\nu} - \Lambda g_{\mu\nu} = 0 \qquad \text{for } r > 0
$$

har 16 komponenter, men bare tre av dem er ikke-trivielle, nemlig:
$\mu = \nu = 0$, $\mu = \nu = 1$ og $\mu = \nu = 2$.
Ta først ligningen $G_{00} - \Lambda g_{00} = 0$:

$$
\frac{\mathrm{e}^{2a}}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\left(1 - \mathrm{e}^{-2b}\right)\right) - \Lambda \mathrm{e}^{2a} = 0 \; .
$$

En enkel omforming gir ligningen

$$
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r\left(1 - \mathrm{e}^{-2b}\right)\right) - \Lambda r^2 = 0 \; ,
$$

med løsningen

$$
r\left(1 - \mathrm{e}^{-2b}\right) - \frac{\Lambda r^3}{3} = R_M \; ,
$$

der R_M er en integrasjonskonstant. Her står det at

$$\mathrm{e}^{-2b} = 1 - \frac{R_M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} \; .$$

Så til ligningen $G_{11} - \Lambda g_{11} = 0$:

$$\frac{1}{r^2}\left(2ra' + 1 - \mathrm{e}^{2b}\right) + \Lambda \mathrm{e}^{2b} = 0 \; .$$

Innsatt for e^{2b} gir det at

$$2a' = -\frac{1}{r} + \frac{(1-\Lambda r^2)\,\mathrm{e}^{2b}}{r} = -\frac{1}{r} + \frac{1-\Lambda r^2}{r - R_M - \frac{\Lambda r^3}{3}} \; .$$

Denne ligningen kan integreres direkte, og gir at

$$2a = 2a_0 - \ln r + \ln\left(r - R_M - \frac{\Lambda r^3}{3}\right) = 2a_0 + \ln\left(1 - \frac{R_M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right) ,$$

der a_0 er en integrasjonskonstant. Vi kan like gjerne sette $a_0 = 0$, siden dette bare betyr at vi fikserer tidsskalaen. Det gir at

$$\mathrm{e}^{2a} = \mathrm{e}^{-2b} = 1 - \frac{R_M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} \; .$$

Dermed er metrikken bestemt, og det gjenstår bare å verifisere ligningen $G_{22} - \Lambda g_{22} = 0$:

$$r\mathrm{e}^{-2b}\left(ra'' + (1+ra')(a'-b')\right) + \Lambda r^2 = 0 \; .$$

At denne ligningen holder, viser vi ved følgende utregning:

$$\begin{aligned}
a' - b' &= 2a' = -\frac{1}{r} + \frac{1-\Lambda r^2}{r - R_M - \frac{\Lambda r^3}{3}} \; , \\
1 + ra' &= \frac{r}{2}\left(\frac{2}{r} + 2a'\right) = \frac{r}{2}\left(\frac{1}{r} + \frac{1-\Lambda r^2}{r - R_M - \frac{\Lambda r^3}{3}}\right) , \\
(1+ra')(a'-b') &= \frac{r}{2}\left(-\frac{1}{r^2} + \left(\frac{1-\Lambda r^2}{r - R_M - \frac{\Lambda r^3}{3}}\right)^2\right) , \\
ra'' &= \frac{r}{2}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{2\Lambda r}{r - R_M - \frac{\Lambda r^3}{3}} - \left(\frac{1-\Lambda r^2}{r - R_M - \frac{\Lambda r^3}{3}}\right)^2\right) , \\
ra'' + (1+ra')(a'-b') &= -\frac{\Lambda r}{1 - \frac{R_M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}} = -\Lambda r\,\mathrm{e}^{2b} \; .
\end{aligned}$$

2c) Den kosmologiske konstanten Λ gir et ekstra ledd i forhold til Schwarzschild-metrikken, punkt 1h) ovenfor. Vi har nå at

$$f_0 = \frac{1}{f_1} = 1 - \frac{R_M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3} \; , \qquad f_2 = r^2 \; .$$

Vi har at

$$f_0' = \frac{R_M}{r^2} - \frac{2\Lambda r}{3} \; .$$

og derfor er $f_0' = 0$ for

$$r = R_0 = \sqrt[3]{\frac{3R_M}{2\Lambda}} \; .$$

La oss anta (som det er vanlig å gjøre) at $R_M > 0$ og $\Lambda > 0$.
Da er $f_0' > 0$, dvs. at en partikkel i ro tiltrekkes (innover mot origo), for $r < R_0$.
Mens $f_0' < 0$, dvs. at en partikkel i ro frastøtes, for $r > R_0$.
Vi har videre at

$$\begin{aligned}
F &= 2r\left(1 - \frac{R_M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}\right)\left(-\frac{\frac{R_M}{r^2} - \frac{2\Lambda r}{3}}{1 - \frac{R_M}{r} - \frac{\Lambda r^2}{3}} + \frac{-\frac{2R_M}{r^3} - \frac{2\Lambda}{3}}{2\left(\frac{R_M}{r^2} - \frac{2\Lambda r}{3}\right)} + \frac{2}{r} - \frac{1}{2r}\right) \\
&= 2\left(r - R_M - \frac{\Lambda r^3}{3}\right)\left(\frac{-R_M + \frac{2\Lambda r^3}{3}}{r\left(r - R_M - \frac{\Lambda r^3}{3}\right)} - \frac{R_M + \frac{\Lambda r^3}{3}}{r\left(R_M - \frac{2\Lambda r^3}{3}\right)} + \frac{3}{2r}\right) \\
&= 2\left(r - R_M - \frac{\Lambda r^3}{3}\right)\left(\left(\frac{1}{r} - \frac{1 - \Lambda r^2}{r - R_M - \frac{\Lambda r^3}{3}}\right) - \left(\frac{1}{r} + \frac{\Lambda r^2}{R_M - \frac{2\Lambda r^3}{3}}\right) + \frac{3}{2r}\right) \\
&= -2 + 2\Lambda r^2 + 3 - \frac{3R_M}{r} - \Lambda r^2 - \frac{2\Lambda r^2\left(r - R_M - \frac{\Lambda r^3}{3}\right)}{R_M - \frac{2\Lambda r^3}{3}} \\
&= 1 - \frac{3R_M}{r} + 3\Lambda r^2 - \frac{2\Lambda r^3(1 - \Lambda r^2)}{R_M - \frac{2\Lambda r^3}{3}} \; .
\end{aligned}$$

Det mest interessante tilfellet er når $R_M << r << R_0$, der R_0 er som definert ovenfor. Disse to ulikhetene gjelder for planetene i vårt solsystem, hvis $\Lambda > 0$, siden den observerte øvre grensen på Λ er svært liten. Da gjelder at

$$\Lambda r^3 << R_M \qquad \text{og} \qquad \Lambda r^2 << \frac{R_M}{r} << 1 \; ,$$

og følgelig er

$$F \approx 1 - \frac{3R_M}{r} - \frac{2\Lambda r^3}{R_M} \; .$$

Stabile sirkelbaner eksisterer for $F > 0$, altså grovt sett for

$$3R_M < r < \sqrt[3]{\frac{R_M}{2\Lambda}} = \frac{R_0}{\sqrt[3]{3}} \; .$$

For å undersøke om Keplers tredje lov holder for en sirkelbane med $r = r_0$, beregner vi kvadratet av omløpstiden,

$$T^2 = \frac{4\pi^2 f_2'(r_0)}{c^2 f_0'(r_0)} = \frac{8\pi^2 {r_0}^3}{c^2\left(R_M - \frac{2\Lambda {r_0}^3}{3}\right)} \; .$$

Omkretsen er $P = 2\pi\sqrt{f_2(r_0)} = 2\pi r_0$. Altså er

$$\frac{T^2}{P^3} = \frac{1}{\pi c^2\left(R_M - \frac{2\Lambda {r_0}^3}{3}\right)} = \frac{1}{\pi c^2 R_M\left(1 - \frac{{r_0}^3}{{R_0}^3}\right)} \;.$$

For $r_0 << R_0$ er korreksjonen til Keplers tredje lov liten.
Perihelbevegelsen pr. omløp er

$$2\pi\left(\frac{1}{\sqrt{F(r_0)}} - 1\right) \approx \frac{3\pi R_M}{r_0} + \frac{2\pi\Lambda {r_0}^3}{R_M} \;.$$

Metrikken er singulær, i polarkoordinater, for $f_2 = 0$, dvs. $r = 0$, og for $f_0 = 0$, dvs. for $r = R_1 \approx R_M$ og $r = R_2 \approx \sqrt{3/\Lambda}$.
Her er R_1 og R_2 de to positive røttene i tredjegradsligningen (for r)

$$r - R_M - \frac{\Lambda r^3}{3} = 0 \;.$$

Den tredje roten er negativ.
Singularitetene for $r = 0$ og $r = R_1 \approx R_M$ har samme karakter som for Schwarzschild-metrikken: den ene er en ekte singularitet, den andre en koordinatsingularitet.
Singulariteten for $r = R_2$ er ny i forhold til Schwarzschild-metrikken, og ser også ut som en koordinatsingularitet (?)

2d) I solsystemet:
Perihelbevegelsen er av størrelsesorden

$$\frac{R_M}{r_0} = \begin{cases} 5 \times 10^{-8} & \text{for Merkur,} \\ 5 \times 10^{-10} & \text{for Pluto.} \end{cases}$$

Videre er

$$|\Lambda|\,{r_0}^2 \le \begin{cases} 4 \times 10^{-31} & \text{for Merkur,} \\ 4 \times 10^{-27} & \text{for Pluto.} \end{cases}$$

Korreksjonen til perihelbevegelsen på grunn av den kosmologiske konstanten er av størrelsesorden

$$\frac{|\Lambda|\,{r_0}^3}{R_M} \le \begin{cases} 6 \times 10^{-24} & \text{for Merkur,} \\ 6 \times 10^{-18} & \text{for Pluto.} \end{cases}$$

Altså forsvinnende liten i forhold til selve perihelbevegelsen.
Vi har videre (forutsatt $\Lambda > 0$) at

$$R_0 = \sqrt[3]{\frac{3R_M}{2\Lambda}} \ge 4 \times 10^{18}\ \text{m} = 400\ \text{lysår} \;.$$

Den relative korreksjonen til Keplers tredje lov er av størrelsesorden

$$\left(\frac{r_0}{R_0}\right)^3 = \frac{2\Lambda {r_0}^3}{3R_M} \le \begin{cases} 4 \times 10^{-24} & \text{for Merkur,} \\ 4 \times 10^{-18} & \text{for Pluto.} \end{cases}$$

Altså igjen forsvinnende liten.