NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Jan Myrheim
Telefon: 93653

Eksamen i fag 74 350 Klassisk feltteori
Lørdag 30. november 1996
Tid: 09.00–14.00

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ B): Godkjent lommekalkulator.
Rottmann, *Mathematische Formelsammlung.*
Barnett and Cronin, *Mathematical Formulae.*
Øgrim og Lian, *Størrelser og enheter i fysikk og teknikk.*

Oppgave 1:

Gitt et symmetrisk tensorfelt $\phi_{\mu\nu} = \phi_{\nu\mu} = \phi_{\mu\nu}(x)$, der $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$ og $x = (x^0, x^1, x^2, x^3)$. I denne oppgaven vil vi bare bruke den egenskapen at feltet transformeres som en tensor under Lorentz-transformasjoner.
Lagrange-tettheten for feltet $\phi_{\mu\nu}$ er

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \frac{1}{2}\,\eta^{\kappa\lambda}\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}\,(&C_1\,\phi_{\kappa\mu,\rho}\,\phi_{\lambda\nu,\sigma} + C_2\,\phi_{\kappa\mu,\rho}\,\phi_{\lambda\sigma,\nu} + C_3\,\phi_{\kappa\lambda,\rho}\,\phi_{\mu\nu,\sigma} \\ &+C_4\,\phi_{\kappa\lambda,\rho}\,\phi_{\mu\sigma,\nu} + C_5\,\phi_{\kappa\rho,\lambda}\,\phi_{\mu\sigma,\nu})\ ,\end{aligned}$$

der C_1, C_2, C_3, C_4 og C_5 er konstanter ("koplingskonstanter").
Den metriske tensoren i den spesielle relativitetsteorien er

$$\eta_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

a) Forklar kort hva som menes med at $\phi_{\mu\nu}$ transformeres som en tensor av rang to under en vilkårlig Lorentz-transformasjon $x^\mu \mapsto \tilde{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu$.

b) Er denne feltteorien Lorentz-invariant? Translasjonsinvariant (i tid og rom)? Begrunn kort svarene.

c) Vis at Euler–Lagrange-ligningene som følger fra Lagrange-tettheten $\mathcal{L}$ kan skrives på følgende form:

$$\begin{aligned}\eta^{\kappa\lambda}\,(2C_1\,\phi_{\alpha\beta,\kappa\lambda} + C_4\,\phi_{\kappa\lambda,\alpha\beta} + (C_2 + C_5)(\phi_{\alpha\kappa,\beta\lambda} + \phi_{\beta\kappa,\alpha\lambda}) \\ +\eta_{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu}\,(2C_3\,\phi_{\kappa\lambda,\mu\nu} + C_4\,\phi_{\kappa\mu,\lambda\nu})) \quad = \quad 0\ . \qquad (1)\end{aligned}$$

Hvor mange uavhengige ligninger er det?

d) Et felt $\xi_\mu = \xi_\mu(x)$ kan brukes til å definere følgende "gauge-transformasjon":

$$\phi_{\mu\nu} \mapsto \widetilde{\phi}_{\mu\nu} = \phi_{\mu\nu} + \xi_{\mu,\nu} + \xi_{\nu,\mu} \ . \tag{2}$$

Hvilke transformasjonsegenskaper under Lorentz-transformasjoner vil du forlange av feltet ξ_μ (for at $\widetilde{\phi}_{\mu\nu}$ skal transformeres på samme måte som $\phi_{\mu\nu}$)?

e) Vis (ved å bruke enten feltligningen eller Lagrange-tettheten) at teorien ovenfor er invariant under slike gauge-transformasjoner hvis og bare hvis koplingskonstantene oppfyller følgende relasjoner:

$$C_2 = -C_1 + C_6 \ , \quad C_3 = -C_1 \ , \quad C_4 = 2C_1 \ , \quad C_5 = -C_1 - C_6 \ . \tag{3}$$

Her er C_6 en ny vilkårlig konstant.
Hvorfor spiller det ingen rolle i denne teorien hvilken verdi C_6 har?

f) Sett f.eks. $C_1 = 1$, og sett verdiene for C_2 til C_5 som du får fra ligning (3), inn i feltligningen, ligning (1). Vis at den ligningen du får, er ekvivalent med ligningen

$$\eta^{\kappa\lambda} \left(\phi_{\alpha\beta,\kappa\lambda} + \phi_{\kappa\lambda,\alpha\beta} - \phi_{\alpha\kappa,\beta\lambda} - \phi_{\beta\kappa,\alpha\lambda} \right) = 0 \ . \tag{4}$$

g) Anta en planbølgeløsning av ligning (4), av formen

$$\phi_{\mu\nu}(x) = \epsilon_{\mu\nu} \, f(k_\rho x^\rho) \ , \tag{5}$$

der $\epsilon_{\mu\nu} = \epsilon_{\nu\mu}$ er en konstant "polarisasjonstensor", k_ρ er en konstant bølgetallsvektor, og f er en funksjon av en variabel. Anta at f ikke er konstant.
Hvilke betingelser legger feltligningene på $\epsilon_{\mu\nu}$, k_ρ og f?

h) I planbølgeløsningen gitt i ligning (5) er det mulig å transformere polarisasjonstensoren $\epsilon_{\mu\nu}$ ved hjelp av gauge-transformasjoner som i ligning (2).
Vis at det følger av feltligningene at:
1) Hvis $k_\mu k^\mu \neq 0$, fins det en gauge-transformasjon som gjør $\epsilon_{\mu\nu} = 0$.
2) Hvis $k_\mu k^\mu = 0$, og mer spesielt hvis $k_\mu = (1, 0, 0, -1)$, fins det en gauge-transformasjon som gjør

$$\epsilon_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a & b & 0 \\ 0 & b & -a & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} , \tag{6}$$

der a og b er konstanter.

i) Ligning (4) er identisk med Einsteins gravitasjonsligning i vakuum, når den metriske tensoren er $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \phi_{\mu\nu}$, og $\phi_{\mu\nu}$ er en liten perturbasjon.
Når feltene ξ_μ og $\phi_{\mu\nu}$ begge er "tilstrekkelig små", kan gauge-transformasjonen i ligning (2) tolkes som en liten koordinattransformasjon.
Hva har du nå lært om gravitasjonsbølger?

Oppgave 2:

Gitt metrikken $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \phi_{\mu\nu}$, der $\phi_{\mu\nu}$ er et symmetrisk tensorfelt, som i forrige oppgave. La $x^\mu = x^\mu(\tau)$ være tid- og romkoordinatene til en punktpartikkel, som funksjon av en parameter τ. Den firedimensjonale hastigheten til partikkelen er $\dot{x}^\mu = \mathrm{d}x^\mu/\mathrm{d}\tau$.
Anta at Lagrange-funksjonen er

$$L = -\frac{1}{2} m g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu \ .$$

m er en konstant (hvilemassen til partikkelen, hvis hvilemassen ikke er null og τ er egentiden).

a) Utled Euler–Lagrange-ligningene som følger av Lagrange-funksjonen L.

b) La feltet $\phi_{\mu\nu}$ beskrive en plan gravitasjonsbølge, som gitt i ligning (5), med en bølgetallsvektor $k_\rho = (1, 0, 0, -1)$ og en polarisasjonstensor som i ligning (6).
Anta at funksjonen f i ligning (5) er lik null utenfor et endelig intervall, det vil si at bølgen passerer et vilkårlig punkt i rommet innenfor et endelig tidsintervall.
Anta at hastigheten til partikkelen, før gravitasjonsbølgen passerer, er

$$\dot{x}^\mu = (c, u, v, 0) \ ,$$

der c, u og v er konstanter. c er lyshastigheten, og $\dot{x}_\mu \dot{x}^\mu = c^2 - u^2 - v^2 \geq 0$.
Hvordan beveger partikkelen seg etter at gravitasjonsbølgen har passert?