Eksamen i klassisk feltteori, fag 74 350, 30. november 1996
Løsninger

1a) En kovariant tensor transformeres slik under en Lorentz-transformasjon $x^\mu \mapsto \widetilde{x}^\mu = \Lambda^\mu{}_\nu\, x^\nu$:

$$\widetilde{\phi}_{\mu\nu}(\widetilde{x}) = \frac{\partial x^\kappa}{\partial \widetilde{x}^\mu}\,\frac{\partial x^\lambda}{\partial \widetilde{x}^\nu}\,\phi_{\kappa\lambda}(x) = (\Lambda^{-1})^\kappa{}_\mu\,(\Lambda^{-1})^\lambda{}_\nu\,\phi_{\kappa\lambda}(x)\ .$$

At matrisen $\Lambda^\mu{}_\nu$ representerer en Lorentz-transformasjon, vil si at $\eta_{\kappa\lambda}\,\Lambda^\kappa{}_\mu\,\Lambda^\lambda{}_\nu = \eta_{\mu\nu}$, eller ekvivalent at

$$\eta^{\alpha\mu}\,\eta_{\kappa\lambda}\,\Lambda^\kappa{}_\mu\,\Lambda^\lambda{}_\nu = \eta^{\alpha\mu}\,\eta_{\mu\nu} = \delta^\alpha_\nu\ .$$

Dette viser at den inverse til matrisen $\Lambda^\mu{}_\nu$ er

$$(\Lambda^{-1})^\mu{}_\nu = \eta^{\mu\rho}\,\eta_{\sigma\nu}\,\Lambda^\sigma{}_\rho = \Lambda_\nu{}^\mu\ .$$

Det siste likhetstegnet her er en definisjon.

1b) Den oppgitte Lagrange-tettheten $\mathcal{L}$ definerer en teori som er både Lorentz-invariant og translasjonsinvariant i tid og rom.
Den er Lorentz-invariant fordi $\mathcal{L}$ transformeres som en skalar under Lorentz-transformasjoner.
Den er translasjonsinvariant fordi $\mathcal{L}$ ikke avhenger eksplisitt av tid og rom, dvs. at både den metriske tensoren $\eta_{\mu\nu}$ og koeffisientene C_1 til C_5 er konstante i tid og rom.

1c) Euler–Lagrange-ligningene får vi kanskje enklest ved å beregne de deriverte $\partial\mathcal{L}/\partial\phi_{\alpha\beta,\gamma}$ som om symmetrien $\phi_{\alpha\beta} = \phi_{\beta\alpha}$ ikke eksisterte, og så symmetriserer vi etterpå. Det gir ligningene

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\gamma}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{\alpha\beta,\gamma}} + \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{\beta\alpha,\gamma}}\right) = 0\ ,$$

der

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\gamma}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\phi_{\alpha\beta,\gamma}}\right) &= \frac{1}{2}\Big(C_1\,(\eta^{\alpha\lambda}\eta^{\beta\nu}\eta^{\gamma\sigma}\phi_{\lambda\nu,\sigma\gamma} + \eta^{\kappa\alpha}\eta^{\mu\beta}\eta^{\rho\gamma}\phi_{\kappa\mu,\rho\gamma}) \\
&\quad +C_2\,(\eta^{\alpha\lambda}\eta^{\beta\nu}\eta^{\gamma\sigma}\phi_{\lambda\sigma,\nu\gamma} + \eta^{\kappa\alpha}\eta^{\mu\gamma}\eta^{\rho\beta}\phi_{\kappa\mu,\rho\gamma}) \\
&\quad +C_3\,(\eta^{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu}\eta^{\gamma\sigma}\phi_{\mu\nu,\sigma\gamma} + \eta^{\kappa\lambda}\eta^{\alpha\beta}\eta^{\rho\gamma}\phi_{\kappa\lambda,\rho\gamma}) \\
&\quad +C_4\,(\eta^{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu}\eta^{\gamma\sigma}\phi_{\mu\sigma,\nu\gamma} + \eta^{\kappa\lambda}\eta^{\alpha\gamma}\eta^{\rho\beta}\phi_{\kappa\lambda,\rho\gamma}) \\
&\quad +C_5\,(\eta^{\alpha\gamma}\eta^{\mu\nu}\eta^{\beta\sigma}\phi_{\mu\sigma,\nu\gamma} + \eta^{\kappa\lambda}\eta^{\alpha\gamma}\eta^{\rho\beta}\phi_{\kappa\rho,\lambda\gamma})\Big) \\
&= C_1\,\eta^{\alpha\lambda}\eta^{\beta\nu}\eta^{\gamma\sigma}\phi_{\lambda\nu,\sigma\gamma} + C_2\,\eta^{\alpha\lambda}\eta^{\beta\nu}\eta^{\gamma\sigma}\phi_{\lambda\sigma,\nu\gamma} + C_3\,\eta^{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu}\eta^{\gamma\sigma}\phi_{\mu\nu,\sigma\gamma} \\
&\quad +\frac{C_4}{2}\,(\eta^{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu}\eta^{\gamma\sigma}\phi_{\mu\sigma,\nu\gamma} + \eta^{\kappa\lambda}\eta^{\alpha\gamma}\eta^{\rho\beta}\phi_{\kappa\lambda,\rho\gamma}) + C_5\,\eta^{\kappa\lambda}\eta^{\alpha\gamma}\eta^{\rho\beta}\phi_{\kappa\rho,\lambda\gamma} \\
&= \eta^{\alpha\kappa}\eta^{\beta\lambda}\eta^{\mu\nu}\left(C_1\,\phi_{\kappa\lambda,\mu\nu} + C_2\,\phi_{\kappa\mu,\lambda\nu} + \frac{C_4}{2}\,\phi_{\mu\nu,\kappa\lambda} + C_5\,\phi_{\lambda\mu,\kappa\nu}\right) \\
&\quad +\eta^{\alpha\beta}\eta^{\kappa\lambda}\eta^{\mu\nu}\left(C_3\,\phi_{\kappa\lambda,\mu\nu} + \frac{C_4}{2}\,\phi_{\kappa\mu,\lambda\nu}\right)\ .
\end{aligned}$$

Symmetrisering gir følgende Euler–Lagrange-ligninger:

$$\begin{aligned}\eta^{\alpha\kappa}\eta^{\beta\lambda}\eta^{\mu\nu}\left(2C_1\,\phi_{\kappa\lambda,\mu\nu}+C_4\,\phi_{\mu\nu,\kappa\lambda}+(C_2+C_5)(\phi_{\kappa\mu,\lambda\nu}+\phi_{\lambda\mu,\kappa\nu})\right)&\\ +\eta^{\alpha\beta}\eta^{\kappa\lambda}\eta^{\mu\nu}\left(2C_3\,\phi_{\kappa\lambda,\mu\nu}+C_4\,\phi_{\kappa\mu,\lambda\nu}\right)&=0\;.\end{aligned}$$

Dette er ligning (1) i oppgaveteksten, bare med den forskjellen at indeksene α og β står oppe istedenfor nede.
Det er 10 uavhengige ligninger, like mange som det er uavhengige komponenter av $\phi_{\mu\nu}$.

1d) ξ_μ må transformeres som en kovariant vektor under Lorentz-transformasjoner.

1e) Det enkleste er å bruke feltligningene. At gauge-transformasjonen $\widetilde{\phi}_{\mu\nu}=\phi_{\mu\nu}+\xi_{\mu,\nu}+\xi_{\nu,\mu}$ er en symmetri, betyr pr. definisjon at feltligningene gjelder for $\widetilde{\phi}_{\mu\nu}$ hvis og bare hvis de gjelder for $\phi_{\mu\nu}$. Siden feltligningene er lineære i feltet $\phi_{\mu\nu}$, er den nødvendige og tilstrekkelige betingelsen at vi skal få en identitet når vi setter inn differensen

$$\Delta\phi_{\mu\nu}=\widetilde{\phi}_{\mu\nu}-\phi_{\mu\nu}=\xi_{\mu,\nu}+\xi_{\nu,\mu}$$

i feltligningene. Ligningene

$$\begin{aligned}&\eta^{\mu\nu}\left(2C_1\left(\xi_{\alpha,\beta\mu\nu}+\xi_{\beta,\alpha\mu\nu}\right)+C_4\left(\xi_{\mu,\nu\alpha\beta}+\xi_{\nu,\mu\alpha\beta}\right)\right.\\ &\qquad\left.+(C_2+C_5)(\xi_{\alpha,\mu\beta\nu}+\xi_{\mu,\alpha\beta\nu}+\xi_{\beta,\mu\alpha\nu}+\xi_{\mu,\beta\alpha\nu})\right)\\ &+\eta_{\alpha\beta}\eta^{\kappa\lambda}\eta^{\mu\nu}\left(2C_3\left(\xi_{\kappa,\lambda\mu\nu}+\xi_{\lambda,\kappa\mu\nu}\right)+C_4\left(\xi_{\kappa,\mu\lambda\nu}+\xi_{\mu,\kappa\lambda\nu}\right)\right)\;=\;0\end{aligned}$$

skal altså være identisk oppfylt, for et vilkårlig felt ξ_μ. Det er de hvis og bare hvis

$$2C_1+C_2+C_5=C_4+C_2+C_5=2C_3+C_4=0\;.$$

Løsningen av disse tre ligningene for de fem koeffisientene C_1 til C_5 er ligning (3) i oppgaveteksten, som inneholder to ubestemte koeffisienter C_1 og C_6.
Verdien av C_6 er irrelevant fordi C_2 og C_5 forekommer i feltligningene bare i kombinasjonen $C_2+C_5=-2C_1$, som altså er uavhengig av C_6.

$-\;\times\;-\;\times\;-\;\times\;-$

For sammenligningens skyld (til skrekk og advarsel!) kan vi løse det samme problemet ved å se på hvordan Lagrange-tettheten transformeres under en *infinitesimal* gauge-transformasjon, altså med ξ_μ infinitesimal. Vi har at

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{L}&=\mathcal{L}(\widetilde{\phi})-\mathcal{L}(\phi)\\ &=\frac{1}{2}\eta^{\kappa\lambda}\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}\left(C_1\left((\xi_{\kappa,\mu\rho}+\xi_{\mu,\kappa\rho})\phi_{\lambda\nu,\sigma}+\phi_{\kappa\mu,\rho}(\xi_{\lambda,\nu\sigma}+\xi_{\nu,\lambda\sigma})\right)\right.\\ &\qquad+C_2\left((\xi_{\kappa,\mu\rho}+\xi_{\mu,\kappa\rho})\phi_{\lambda\sigma,\nu}+\phi_{\kappa\mu,\rho}(\xi_{\lambda,\sigma\nu}+\xi_{\sigma,\lambda\nu})\right)\\ &\qquad+C_3\left((\xi_{\kappa,\lambda\rho}+\xi_{\lambda,\kappa\rho})\phi_{\mu\nu,\sigma}+\phi_{\kappa\lambda,\rho}(\xi_{\mu,\nu\sigma}+\xi_{\nu,\mu\sigma})\right)\\ &\qquad+C_4\left((\xi_{\kappa,\lambda\rho}+\xi_{\lambda,\kappa\rho})\phi_{\mu\sigma,\nu}+\phi_{\kappa\lambda,\rho}(\xi_{\mu,\sigma\nu}+\xi_{\sigma,\mu\nu})\right)\\ &\qquad\left.+C_5\left((\xi_{\kappa,\rho\lambda}+\xi_{\rho,\kappa\lambda})\phi_{\mu\sigma,\nu}+\phi_{\kappa\rho,\lambda}(\xi_{\mu,\sigma\nu}+\xi_{\sigma,\mu\nu})\right)\right)\\ &=\eta^{\kappa\lambda}\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}\left((2C_1+C_2)\,\xi_{\kappa,\mu\rho}\,\phi_{\lambda\nu,\sigma}+C_2\,\xi_{\kappa,\mu\rho}\,\phi_{\nu\sigma,\lambda}\right.\\ &\qquad+\left(2C_3+\frac{C_4}{2}\right)\xi_{\kappa,\lambda\rho}\,\phi_{\mu\nu,\sigma}+(C_4+C_5)\,\xi_{\kappa,\lambda\rho}\,\phi_{\mu\sigma,\nu}\\ &\qquad\left.+\frac{C_4}{2}\,\xi_{\rho,\kappa\lambda}\,\phi_{\mu\nu,\sigma}+C_5\,\xi_{\rho,\kappa\lambda}\,\phi_{\mu\sigma,\nu}\right)\;.\end{aligned}$$

Betingelsen for at denne transformasjonen skal være en symmetri, er at $\Delta\mathcal{L}$ er en divergens av et eller annet vektorfelt $\Delta\mathcal{M}^\sigma$, dvs. at $\Delta\mathcal{L} = \Delta\mathcal{M}^\sigma{}_{,\sigma} = \partial(\Delta\mathcal{M}^\sigma)/\partial x^\sigma$. Hvordan kan $\Delta\mathcal{M}^\sigma$ se ut? Jo, mest generelt slik:

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{M}^\sigma = \frac{1}{2}\eta^{\kappa\lambda}\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}\,(& A_1\,\xi_{\rho,\kappa\mu}\,\phi_{\lambda\nu} + A_2\,\xi_{\rho,\kappa\lambda}\,\phi_{\mu\nu} + A_3\,\xi_{\kappa,\mu\rho}\,\phi_{\lambda\nu} + A_4\,\xi_{\kappa,\lambda\rho}\,\phi_{\mu\nu} \\
& + A_5\,\xi_{\kappa,\mu\nu}\,\phi_{\lambda\rho} + A_6\,\xi_{\kappa,\lambda\mu}\,\phi_{\nu\rho} + A_7\,\xi_{\rho,\kappa}\,\phi_{\lambda\mu,\nu} + A_8\,\xi_{\rho,\kappa}\,\phi_{\mu\nu,\lambda} \\
& + A_9\,\xi_{\kappa,\rho}\,\phi_{\lambda\mu,\nu} + A_{10}\,\xi_{\kappa,\rho}\,\phi_{\mu\nu,\lambda} + A_{11}\,\xi_{\kappa,\mu}\,\phi_{\lambda\rho,\nu} + A_{12}\,\xi_{\kappa,\mu}\,\phi_{\nu\rho,\lambda} \\
& + A_{13}\,\xi_{\kappa,\lambda}\,\phi_{\mu\rho,\nu} + A_{14}\,\xi_{\kappa,\mu}\,\phi_{\lambda\nu,\rho} + A_{15}\,\xi_{\kappa,\lambda}\,\phi_{\mu\nu,\rho})\ ,
\end{aligned}$$

der A_1 til A_{15} er konstante koeffisienter som må bestemmes. Vi har at

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{M}^\sigma{}_{,\sigma} = \frac{1}{2}\eta^{\kappa\lambda}\eta^{\mu\nu}\eta^{\rho\sigma}\,(& A_1\,\xi_{\rho,\kappa\mu}\,\phi_{\lambda\nu,\sigma} + A_2\,\xi_{\rho,\kappa\lambda}\,\phi_{\mu\nu,\sigma} + A_3\,\xi_{\kappa,\mu\rho}\,\phi_{\lambda\nu,\sigma} + A_4\,\xi_{\kappa,\lambda\rho}\,\phi_{\mu\nu,\sigma} \\
& + A_5\,\xi_{\kappa,\mu\nu}\,\phi_{\lambda\rho,\sigma} + A_6\,\xi_{\kappa,\lambda\mu}\,\phi_{\nu\rho,\sigma} + A_7\,\xi_{\rho,\kappa\sigma}\,\phi_{\lambda\mu,\nu} + A_8\,\xi_{\rho,\kappa\sigma}\,\phi_{\mu\nu,\lambda} \\
& + A_9\,\xi_{\kappa,\rho\sigma}\,\phi_{\lambda\mu,\nu} + A_{10}\,\xi_{\kappa,\rho\sigma}\,\phi_{\mu\nu,\lambda} + A_{11}\,\xi_{\kappa,\mu\sigma}\,\phi_{\lambda\rho,\nu} + A_{12}\,\xi_{\kappa,\mu\sigma}\,\phi_{\nu\rho,\lambda} \\
& + A_{13}\,\xi_{\kappa,\lambda\sigma}\,\phi_{\mu\rho,\nu} + A_{14}\,\xi_{\kappa,\mu\sigma}\,\phi_{\lambda\nu,\rho} + A_{15}\,\xi_{\kappa,\lambda\sigma}\,\phi_{\mu\nu,\rho} \\
& + A_1\,\xi_{\rho,\kappa\mu\sigma}\,\phi_{\lambda\nu} + A_2\,\xi_{\rho,\kappa\lambda\sigma}\,\phi_{\mu\nu} + A_3\,\xi_{\kappa,\mu\rho\sigma}\,\phi_{\lambda\nu} + A_4\,\xi_{\kappa,\lambda\rho\sigma}\,\phi_{\mu\nu} \\
& + A_5\,\xi_{\kappa,\mu\nu\sigma}\,\phi_{\lambda\rho} + A_6\,\xi_{\kappa,\lambda\mu\sigma}\,\phi_{\nu\rho} + A_7\,\xi_{\rho,\kappa}\,\phi_{\lambda\mu,\nu\sigma} + A_8\,\xi_{\rho,\kappa}\,\phi_{\mu\nu,\lambda\sigma} \\
& + A_9\,\xi_{\kappa,\rho}\,\phi_{\lambda\mu,\nu\sigma} + A_{10}\,\xi_{\kappa,\rho}\,\phi_{\mu\nu,\lambda\sigma} + A_{11}\,\xi_{\kappa,\mu}\,\phi_{\lambda\rho,\nu\sigma} + A_{12}\,\xi_{\kappa,\mu}\,\phi_{\nu\rho,\lambda\sigma} \\
& + A_{13}\,\xi_{\kappa,\lambda}\,\phi_{\mu\rho,\nu\sigma} + A_{14}\,\xi_{\kappa,\mu}\,\phi_{\lambda\nu,\rho\sigma} + A_{15}\,\xi_{\kappa,\lambda}\,\phi_{\mu\nu,\rho\sigma})
\end{aligned}$$

Den siste halvparten av denne summen, med ledd som inneholder tredjederiverte av ξ_μ eller andrederiverte av $\phi_{\mu\nu}$, må være identisk null. Det gir følgende betingelser:

$$A_1 + A_6 = A_2 + A_4 = A_3 + A_5 = A_7 + A_{12} = A_8 + A_{10} = A_9 + A_{11} = A_{13} = A_{14} = A_{15} = 0\ .$$

Ligningen $\Delta\mathcal{L} = \Delta\mathcal{M}^\sigma{}_{,\sigma}$ er da ekvivalent med at

$$\begin{aligned}
4C_1 + 2C_2 &= A_3 + A_{11} + A_{14} &&= A_3 - A_9\ , \\
2C_2 &= A_1 + A_{12} &&= A_1 - A_7\ , \\
4C_3 + C_4 &= A_4 + A_8 + A_{15} &&= -A_2 + A_8\ , \\
2C_4 + 2C_5 &= A_6 + A_7 + A_{13} &&= -A_1 + A_7\ , \\
C_4 &= A_2 + A_{10} &&= A_2 - A_8\ , \\
2C_5 &= A_5 + A_9 &&= -A_3 + A_9\ .
\end{aligned}$$

Det gir de samme tre betingelsene som ovenfor, nemlig:

$$2C_1 + C_2 + C_5 = C_2 + C_4 + C_5 = 2C_3 + C_4 = 0\ .$$

1f) $C_1 = 1$ gir $C_2 = -1 + C_6$, $C_3 = -1$, $C_4 = 2$ og $C_5 = -1 - C_6$. Det gir feltligningen

$$\eta^{\kappa\lambda}(\phi_{\alpha\beta,\kappa\lambda} + \phi_{\kappa\lambda,\alpha\beta} - \phi_{\alpha\kappa,\beta\lambda} - \phi_{\beta\kappa,\alpha\lambda} + \eta_{\alpha\beta}\eta^{\mu\nu}(-\phi_{\kappa\lambda,\mu\nu} + \phi_{\kappa\mu,\lambda\nu})) = 0\ . \qquad (1)$$

For å vise at denne impliserer ligning (4) i oppgaveteksten kontraherer vi indeksene α og β, dvs. vi multipliserer ligningen med $\eta^{\alpha\beta}$. Siden $\eta^{\alpha\beta}\eta_{\alpha\beta} = \delta^\alpha_\alpha = 4$, gir det at

$$2\eta^{\kappa\lambda}\eta^{\mu\nu}(-\phi_{\kappa\lambda,\mu\nu} + \phi_{\kappa\mu,\lambda\nu})) = 0\ .$$

Innsatt i ligning (1) ovenfor gir det ligning (4) i oppgaven.
Den omvendte implikasjonen, fra ligning (4) i oppgaveteksten til ligning (1) ovenfor, vises på tilsvarende måte.

1g) Når $\phi_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu} f(k_\rho x^\rho)$, så er f.eks. $\phi_{\alpha\beta,\kappa} = \epsilon_{\alpha\beta} k_\kappa f'(k_\rho x^\rho)$ og $\phi_{\alpha\beta,\kappa\lambda} = \epsilon_{\alpha\beta} k_\kappa k_\lambda f''(k_\rho x^\rho)$. En mulig måte å oppfylle feltligningen på er at f'' er identisk lik null.
Den andre muligheten er at

$$\eta^{\kappa\lambda}(\epsilon_{\alpha\beta} k_\kappa k_\lambda + \epsilon_{\kappa\lambda} k_\alpha k_\beta - \epsilon_{\alpha\kappa} k_\beta k_\lambda - \epsilon_{\beta\kappa} k_\alpha k_\lambda) = 0 \ .$$

Eller, med en liten omskriving:

$$\epsilon_{\alpha\beta}(k_\kappa k^\kappa) + (\eta^{\kappa\lambda}\epsilon_{\kappa\lambda}) k_\alpha k_\beta - (\epsilon_{\alpha\kappa} k^\kappa) k_\beta - (\epsilon_{\beta\kappa} k^\kappa) k_\alpha = 0 \ . \tag{2}$$

1h) Anta at $\xi_\mu = a_\mu F(k_\rho x^\rho)$, med a_μ konstant. Da gir ligning (2) i oppgaveteksten at

$$\widetilde{\phi}_{\mu\nu} = \phi_{\mu\nu} + a_\mu k_\nu F'(k_\rho x^\rho) + a_\nu k_\mu F'(k_\rho x^\rho) \ .$$

Hvis $F' = f$, og hvis $\phi_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu} f(k_\rho x^\rho)$, samt $\widetilde{\phi}_{\mu\nu} = \widetilde{\epsilon}_{\mu\nu} f(k_\rho x^\rho)$, så får vi at

$$\widetilde{\epsilon}_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu} + a_\mu k_\nu + a_\nu k_\mu \ .$$

1) Hvis $k_\mu k^\mu \neq 0$, så sier ligning (2) ovenfor at

$$\epsilon_{\alpha\beta} = -A k_\alpha k_\beta + B_\alpha k_\beta + B_\beta k_\alpha \ .$$

Der

$$A = \frac{\eta^{\kappa\lambda}\epsilon_{\kappa\lambda}}{k_\mu k^\mu} \ , \qquad B_\alpha = \frac{\epsilon_{\alpha\kappa} k^\kappa}{k_\mu k^\mu} \ .$$

Da kan vi oppnå at $\widetilde{\epsilon}_{\mu\nu} = 0$ ved at vi velger

$$a_\mu = \frac{A}{2} k_\mu - B_\mu \ .$$

2) Hvis $k_\mu = (1, 0, 0, -1)$, så er $k_\mu k^\mu = 0$, og ligning (2) ovenfor sier at

$$A k_\alpha k_\beta - B_\alpha k_\beta - B_\beta k_\alpha = 0 \ ,$$

hvis vi definerer

$$A = \eta^{\kappa\lambda}\epsilon_{\kappa\lambda} = \epsilon_{00} - \epsilon_{11} - \epsilon_{22} - \epsilon_{33} \ , \qquad B_\alpha = \epsilon_{\alpha\kappa} k^\kappa = \epsilon_{\alpha 0} + \epsilon_{\alpha 3} \ .$$

Følgende tilfeller er ikke-trivielle:

$$\begin{array}{lr}
\alpha, \beta = 0, 0 \ : & A - 2B_0 = 0 \ , \\
\alpha, \beta = 0, 1 \ : & B_1 = 0 \ , \\
\alpha, \beta = 0, 2 \ : & B_2 = 0 \ , \\
\alpha, \beta = 0, 3 \ : & -A + B_0 - B_3 = 0 \ , \\
\alpha, \beta = 1, 3 \ : & B_1 = 0 \ , \\
\alpha, \beta = 2, 3 \ : & B_2 = 0 \ , \\
\alpha, \beta = 3, 3 \ : & A + 2B_3 = 0 \ .
\end{array}$$

Av dem får vi fire uavhengige ligninger:

$$\begin{array}{rcrcl}
B_1 & = & \epsilon_{10} + \epsilon_{13} & = & 0 \ , \\
B_2 & = & \epsilon_{20} + \epsilon_{23} & = & 0 \ , \\
A - 2B_0 & = & -\epsilon_{00} - \epsilon_{11} - \epsilon_{22} - \epsilon_{33} - 2\epsilon_{03} & = & 0 \ , \\
A + 2B_3 & = & \epsilon_{00} - \epsilon_{11} - \epsilon_{22} + \epsilon_{33} + 2\epsilon_{30} & = & 0 \ .
\end{array}$$

Siden $\epsilon_{03} = \epsilon_{30}$, gir det at

$$\epsilon_{11} + \epsilon_{22} = 0 \; .$$

Gauge-transformasjonen

$$\widetilde{\epsilon}_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu} + a_\mu k_\nu + a_\nu k_\mu = \begin{pmatrix} \epsilon_{00} + 2a_0 & \epsilon_{01} + a_1 & \epsilon_{02} + a_2 & \epsilon_{03} + a_3 - a_0 \\ \epsilon_{10} + a_1 & \epsilon_{11} & \epsilon_{12} & \epsilon_{13} - a_1 \\ \epsilon_{20} + a_2 & \epsilon_{21} & \epsilon_{22} & \epsilon_{23} - a_2 \\ \epsilon_{30} + a_3 - a_0 & \epsilon_{31} - a_1 & \epsilon_{32} - a_2 & \epsilon_{33} - 2a_3 \end{pmatrix} ,$$

med

$$a_0 = -\frac{\epsilon_{00}}{2} \; , \quad a_1 = -\epsilon_{01} = \epsilon_{13} \; , \quad a_2 = -\epsilon_{02} = \epsilon_{23} \; , \quad a_3 = \frac{\epsilon_{33}}{2} \; ,$$

gir da at $\widetilde{\epsilon}_{\mu\nu}$ får den formen som er oppgitt i ligning (6) i oppgaveteksten.

1i) En ikke-triviell gravitasjonsbølge er en som ikke kan transformeres bort fullstendig ved hjelp av en koordinattransformasjon.
En ikke-triviell plan gravitasjonsbølge forplanter seg med lyshastigheten, fordi den må ha en bølgetallsvektor k_μ med $k_\mu k^\mu = 0$. Gravitonet må altså være en partikkel som har masse $m = 0$.
I likhet med en plan lysbølge er gravitasjonsbølgen polarisert transversalt på forplantningsretningen, og har to ikke-trivielle polarisasjonsfrihetsgrader.
Men polarisasjonen til gravitasjonsbølgen beskrives av en symmetrisk tensor av rang to, istedenfor en polarisasjonsvektor som for lysbølgen.
(Fotonet har spinn 1, mens gravitonet har spinn 2. En partikkel med masse $m > 0$ og spinn $s = 0, 1/2, 1, 3/2, \ldots$ har $2s + 1$ spinnfrihetsgrader, mens en partikkel med masse $m = 0$ og spinn s har maksimalt to spinnfrihetsgrader, idet den har spinnkomponent $\pm s$ langs en akse som er parallell med impulsen.)

2a) Euler–Lagrangeligningen:

$$\frac{\partial L}{\partial x^\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\alpha} \right) = 0 \; ,$$

blir som følger, etter at vi forkorter bort m:

$$-\frac{1}{2}\, g_{\mu\nu,\alpha} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \left(g_{\alpha\nu} \dot{x}^\nu \right) = \left(-\frac{1}{2}\, g_{\mu\nu,\alpha} + g_{\alpha\nu,\mu} \right) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + g_{\alpha\nu} \ddot{x}^\nu = 0 \; .$$

Her er $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + \phi_{\mu\nu}$.
I ligningen ovenfor er $g_{\mu\nu,\alpha} = \phi_{\mu\nu,\alpha}$ og $g_{\alpha\nu,\mu} = \phi_{\alpha\nu,\mu}$, siden $\eta_{\mu\nu}$ er konstant.
Dessuten kan vi sette $g_{\alpha\nu} = \eta_{\alpha\nu}$, siden $\phi_{\alpha\nu}$ er en liten perturbasjon.
Det gir ligningen

$$\left(-\frac{1}{2}\, \phi_{\mu\nu,\alpha} + \phi_{\alpha\nu,\mu} \right) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \eta_{\alpha\nu} \ddot{x}^\nu = 0 \; .$$

2b) Med $\phi_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu} f(k_\rho x^\rho)$ får Euler–Lagrange-ligningen følgende form:

$$\left(-\frac{1}{2}\, \epsilon_{\mu\nu} k_\alpha + \epsilon_{\alpha\nu} k_\mu \right) f'(k_\rho x^\rho)\, \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + \eta_{\alpha\nu} \ddot{x}^\nu = 0 \; .$$

Vi antar at $k_\rho = (1,0,0,-1)$, og at alle komponenene $\epsilon_{\mu\nu}$ er null med unntak av $\epsilon_{11} = -\epsilon_{22} = a$ og $\epsilon_{12} = \epsilon_{21} = b$.
Vi får fire ligninger, for $\alpha = 0,1,2,3$:

$$\begin{aligned}
-\frac{1}{2}\,(\epsilon_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu)\,f'(k_\rho x^\rho) + \ddot{x}^0 &= 0\ , \\
(\epsilon_{1\nu}\dot{x}^\nu)\,(k_\mu\dot{x}^\mu)\,f'(k_\rho x^\rho) - \ddot{x}^1 &= 0\ , \\
(\epsilon_{2\nu}\dot{x}^\nu)(k_\mu\dot{x}^\mu)\,f'(k_\rho x^\rho) - \ddot{x}^2 &= 0\ , \\
\frac{1}{2}\,(\epsilon_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu)\,f'(k_\rho x^\rho) - \ddot{x}^3 &= 0\ .
\end{aligned}$$

Her er:

$$\begin{aligned}
k_\rho x^\rho &= x^0 - x^3 \approx c\tau + \text{konstant}\ , \\
k_\rho \dot{x}^\rho &= \dot{x}^0 - \dot{x}^3 \approx c\ , \\
\epsilon_{\mu\nu}\dot{x}^\mu\dot{x}^\nu &= a\left((\dot{x}^1)^2 - (\dot{x}^2)^2\right) + 2b\dot{x}^1\dot{x}^2 \approx a(u^2 - v^2) + 2buv\ , \\
\epsilon_{1\nu}\dot{x}^\nu &= a\dot{x}^1 + b\dot{x}^2 \approx au + bv\ , \\
\epsilon_{2\nu}\,\dot{x}^\nu &= b\dot{x}^1 - a\dot{x}^2 \approx bu - av\ .
\end{aligned}$$

Tilnærmingene gjelder fordi $\dot{x}^\mu = (c,u,v,0)$ før gravitasjonsbølgen ankommer, og fordi bevegelsesligningene viser at akselerasjonen $\ddot{x}^\mu$ er liten til enhver tid (vi antar dessuten at bølgen ikke varer lenge nok til at hastigheten $\dot{x}^\mu$ forandres vesentlig). Følgelig er, til en god tilnærming,

$$\ddot{x}^\mu = A^\mu\,f'(c\tau + \text{konstant})\ ,$$

der A^μ er konstant:

$$\begin{aligned}
A^0 &= A^3 = \frac{a}{2}\,(u^2 - v^2) + buv\ , \\
A^1 &= (au + bv)c\ , \\
A^2 &= (bu - av)c\ .
\end{aligned}$$

Legg merke til at hvis partikkelen har liten hastighet, dvs. at $|u|$ og $|v|$ er mye mindre enn c, så er A^0 og A^3 generelt mye mindre enn A^1 og A^2. For en partikkel med relativistisk hastighet (f.eks. et foton), dvs. med $|u|$ og/eller $|v|$ sammenlignbar med c, er alle komponentene A^0, A^1, A^2 og A^3 sammenlignbare.
Integrasjon av akselerasjonen gir hastigheten:

$$\dot{x}^\mu(\tau) - \dot{x}^\mu(-\infty) \approx A^\mu \int_{-\infty}^{\tau} \mathrm{d}\sigma\, f'(c\sigma + \text{konstant}) = \frac{1}{c}\,A^\mu\,f(c\tau + \text{konstant})\ .$$

Det impliserer at hastigheten er den samme før og etter at bølgen passerer:

$$\dot{x}^\mu(\infty) \approx \dot{x}^\mu(-\infty)\ .$$

Men det er fullt mulig at banen til partikkelen forskyves sidelengs i forhold til hva den ville ha vært uten noen gravitasjonsbølge. Integrasjon av hastigheten gir:

$$x^\mu(\tau) - (x^\mu(\tau_0) + (\tau - \tau_0)\dot{x}^\mu(-\infty)) \approx \frac{1}{c}\,A^\mu \int_{\tau_0}^{\tau} \mathrm{d}\sigma\, f(c\sigma + \text{konstant})\ ,$$

der τ_0 er vilkårlig valgt. Og det siste integralet kan godt være forskjellig fra null i grensen når $\tau_0 \to -\infty$ og $\tau \to \infty$.