Eksamen i klassisk feltteori, fag 74 350, 15. desember 1997 Løsninger

1a) Enhver bevaringslov $q =$ konstant, for en eller annen fysisk størrelse q (la oss kalle den "ladning"), er en global bevaringslov.
En lokal bevaringslov har form av en kontinuitetsligning:

$$\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla \cdot \boldsymbol{j} = 0 \ ,$$

der $\rho = \rho(\boldsymbol{r}, t)$ er ladningstettheten på stedet $\boldsymbol{r}$ ved tiden t, og $\boldsymbol{j} = \boldsymbol{j}(\boldsymbol{r}, t)$ er strømtettheten.
Kontinuitetsligningen betyr at ladningen innenfor et vilkårlig volum bare kan forandres ved at det strømmer ladning inn og ut gjennom overflaten til volumet.
En bevaringslov er relativistisk invariant, dvs. at den er en bevaringslov for enhver observatør som beveger seg med konstant hastighet i forhold til et inertialsystem, bare dersom den er lokal. Grunnen er at samtidighet er et relativt begrep. To begivenheter som skjer med en endelig avstand imellom, f.eks. at en viss porsjon ladning forsvinner ett sted og dukker opp et annet sted, ser ikke samtidige ut for alle observatører.

1b) Anta at massetettheten ρ er konstant. Massen innenfor et volum som har kuleform og radius R, er

$$M = \frac{4\pi R^3\rho}{3} \ .$$

I hvert fall hvis vi ser bort fra krumningen av det tredimensjonale rommet.
Setter vi radien R lik Schwarzschild-radien,

$$R = \frac{2GM}{c^2} = \frac{8\pi G R^3 \rho}{3c^2} \ ,$$

får vi at

$$R = c\sqrt{\frac{3}{8\pi G\rho}} \ .$$

Vi setter inn tettheten av vann, $\rho = 10^3\ \mathrm{kg/m^3}$, og får:

$$R = 3{,}0\, 10^8\ \mathrm{m/s}\sqrt{\frac{3}{8\pi 6{,}7\, 10^{-11}\ \mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}\ 10^3\ \mathrm{kg\,m^{-3}}}} = 4{,}0\, 10^{11}\ \mathrm{m} \ .$$

Til sammenligning: avstanden til sola er $1{,}5\, 10^{11}$ m, altså knapt halvparten.
Den kritiske tettheten $\rho_c = 3H^2/(8\pi G)$ gir at

$$R = \frac{c}{H} \approx 10^{10}\ \text{lysår} = 9{,}5\, 10^{25}\ \mathrm{m} \ .$$

1c) Vi har at

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{r - R_M}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{r}{r - R_M} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -r^2 \sin^2\theta \end{pmatrix} \ .$$

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \dfrac{r}{r-R_M} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\dfrac{r-R_M}{r} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\dfrac{1}{r^2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\dfrac{1}{r^2\sin^2\theta} \end{pmatrix} .$$

$$\sqrt{|g|} = \sqrt{|\det(g_{\mu\nu})|} = r^2 \sin\theta \; .$$

Etter at vi har dividert Klein–Gordon-ligningen med $\sqrt{|g|}$ ser den ut som følger:

$$\begin{aligned} & \frac{r}{c^2(r-R_M)}\,\frac{\partial^2\phi}{\partial t^2} - \frac{1}{r^2}\,\frac{\partial}{\partial r}\left(r(r-R_M)\,\frac{\partial\phi}{\partial r}\right) \\ & -\frac{1}{r^2\sin\theta}\,\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\partial\phi}{\partial\theta}\right) - \frac{1}{r^2\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2\phi}{\partial\varphi^2} + \kappa^2\phi \quad = \quad 0 \; . \end{aligned}$$

Vi kan sette inn $\phi(t,r,\theta,\varphi) = T(t)\,R(r)\,\Theta(\theta)\,\Phi(\varphi)$ og separere ligningen i fire ordinære differensialligninger:

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2 T}{\mathrm{d}t^2} &= \alpha T \; , \\ \frac{\mathrm{d}^2 \Phi}{\mathrm{d}\varphi^2} &= \beta\Phi \; , \\ \frac{1}{\sin\theta}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}\left(\sin\theta\,\frac{\mathrm{d}\Theta}{\mathrm{d}\theta}\right) + \frac{\beta}{\sin^2\theta}\,\Theta &= \gamma\Theta \; , \\ -\frac{1}{r^2}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r(r-R_M)\,\frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}r}\right) + \left(\frac{r\alpha}{c^2(r-R_M)} - \frac{\gamma}{r^2} + \kappa^2\right) R &= 0 \; , \end{aligned}$$

der α, β og γ er konstanter.
Men det kommer også an på randbetingelsene (som vi ikke har sagt noe om!) hvorvidt de separerte ligningene lar seg løse, og hvilke verdier konstantene α, β og γ kan ha.

2a) At A_μ er et kovariant vektorfelt betyr at det transformeres slik:

$$\widetilde{A}_\mu = \frac{\partial x^\kappa}{\partial \widetilde{x}^\mu}\,A_\kappa$$

under en koordinattransformasjon $x^\mu \mapsto \widetilde{x}^\mu$.
De partiellderiverte av A_μ transformeres slik:

$$\widetilde{A}_{\mu,\nu} = \frac{\partial}{\partial \widetilde{x}_\nu}\left(\frac{\partial x^\kappa}{\partial \widetilde{x}^\mu}\,A_\kappa\right) = \frac{\partial^2 x^\kappa}{\partial \widetilde{x}^\nu \partial \widetilde{x}^\mu}\,A_\kappa + \frac{\partial x^\kappa}{\partial \widetilde{x}^\mu}\,\frac{\partial x^\lambda}{\partial \widetilde{x}^\nu}\,A_{\kappa,\lambda} \; .$$

Det gir at

$$\widetilde{F}_{\mu\nu} = \widetilde{A}_{\nu,\mu} - \widetilde{A}_{\mu,\nu} = \frac{\partial x^\kappa}{\partial \widetilde{x}^\nu}\,\frac{\partial x^\lambda}{\partial \widetilde{x}^\mu}\,A_{\kappa,\lambda} - \frac{\partial x^\kappa}{\partial \widetilde{x}^\mu}\,\frac{\partial x^\lambda}{\partial \widetilde{x}^\nu}\,A_{\kappa,\lambda} = \frac{\partial x^\kappa}{\partial \widetilde{x}^\mu}\,\frac{\partial x^\lambda}{\partial \widetilde{x}^\nu}\,F_{\kappa\lambda} \; .$$

Som viser at $F_{\mu\nu}$ er et tensorfelt.
Vi har at $\epsilon^{\alpha\mu\nu} A_{\nu,\mu\alpha} = 0$, fordi $\epsilon^{\alpha\mu\nu}$ er antisymmetrisk og $A_{\nu,\mu\alpha}$ symmetrisk i indeksene α og μ. Derfor er

$$\epsilon^{\alpha\mu\nu} F_{\mu\nu,\alpha} = \epsilon^{\alpha\mu\nu} A_{\nu,\mu\alpha} - \epsilon^{\alpha\mu\nu} A_{\mu,\nu\alpha} = 0 \; .$$

2b) For å finne Euler–Lagrange-ligningene

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\alpha} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\beta}\,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_{\alpha,\beta}} = 0\ ,$$

bruker vi at

$$\frac{\partial F_{\mu\nu}}{\partial A_{\alpha,\beta}} = \delta^\alpha_\nu \delta^\beta_\mu - \delta^\alpha_\mu \delta^\beta_\nu\ ,$$

og at

$$\frac{\partial F^{\mu\nu}}{\partial A_{\alpha,\beta}} = g^{\nu\alpha} g^{\mu\beta} - g^{\mu\alpha} g^{\nu\beta}\ .$$

Det gir ligningene

$$\frac{b}{4}\,\epsilon^{\alpha\mu\nu} F_{\mu\nu} - \sqrt{g}\, j^\alpha - \frac{\partial}{\partial x^\beta}\left(-a\sqrt{g}\, F^{\beta\alpha} + \frac{b}{2}\,\epsilon^{\lambda\beta\alpha} A_\lambda \right) = 0\ .$$

Som kan skrives om videre til den oppgitte formen.

2c) Ja. Betingelsen for at den elektriske ladningen er bevart, er kontinuitetsligningen

$$\frac{\partial}{\partial x^\alpha}\,(\sqrt{g}\, j^\alpha) = 0\ .$$

Den gjelder som en konsekvens av feltligningene.

2d) Ja. Feltligningene er invariante under en gauge-transformasjon $A_\mu \mapsto \widetilde{A}_\mu = A_\mu + \chi_{,\mu}$, fordi de bare inneholder den gauge-invariante felttensoren $F_{\mu\nu}$.
Alternativt kan vi se på forandringen i Lagrange-tettheten:

$$\Delta\mathcal{L} = \frac{b}{4}\,\epsilon^{\lambda\mu\nu} \chi_{,\lambda} F_{\mu\nu} - \sqrt{g}\,\chi_{,\mu} j^\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}\left(\frac{b}{4}\,\epsilon^{\mu\rho\nu} \chi F_{\rho\nu} - \sqrt{g}\,\chi j^\mu \right),$$

der vi har omformet ved å bruke at $\epsilon^{\mu\rho\nu} F_{\rho\nu,\mu} = 0$, og at $(\partial/\partial x^\mu)(\sqrt{g}\, j^\mu) = 0$.
Fordi $\Delta\mathcal{L}$ er en absolutt divergens, forandrer den ikke feltligningen.

2e) Ja, med følgende unntak. Når $b \neq 0$, gjelder den betingelsen for invarians at koordinattransformasjonen bevarer orienteringen av koordinatsystemet, dvs. at derivasjonsmatrisen har positiv determinant:

$$\det\left(\frac{\partial \widetilde{x}}{\partial x} \right) > 0\ .$$

Det kan vi se f.eks. ved å se på virkningsintegralet

$$S = \int \mathrm{d}^3x\, \mathcal{L} = -\frac{a}{4} \int \mathrm{d}^3x\, \sqrt{g}\, F^{\mu\nu} F_{\mu\nu} + \frac{b}{4} \int \mathrm{d}^3x\, \epsilon^{\lambda\mu\nu} A_\lambda F_{\mu\nu} - \int \mathrm{d}^3x\, \sqrt{g}\, A_\mu j^\mu\ .$$

Av de tre integralene er det første og det tredje invariant under *alle* koordinattransformasjoner, også de som forandrer orienteringen.
Det andre integralet er invariant, bortsett fra at det skifter fortegn under en koordinattransformasjon $x^\mu \mapsto \widetilde{x}^\mu$ som forandrer orienteringen. Vi har nemlig at

$$\int \mathrm{d}^3\widetilde{x}\, \epsilon^{\lambda\mu\nu} \widetilde{A}_\lambda \widetilde{F}_{\mu\nu} = \int \mathrm{d}^3x\, \left| \det\left(\frac{\partial \widetilde{x}}{\partial x} \right) \right|\, \epsilon^{\lambda\mu\nu}\, \frac{\partial x^\alpha}{\partial \widetilde{x}^\lambda}\, \frac{\partial x^\beta}{\partial \widetilde{x}^\mu}\, \frac{\partial x^\gamma}{\partial \widetilde{x}^\nu}\, A_\alpha F_{\beta\gamma}\ .$$

Siden

$$\epsilon^{\lambda\mu\nu}\,\frac{\partial x^\alpha}{\partial\widetilde{x}^\lambda}\,\frac{\partial x^\beta}{\partial\widetilde{x}^\mu}\,\frac{\partial x^\gamma}{\partial\widetilde{x}^\nu}=\epsilon^{\alpha\beta\gamma}\,\det\!\left(\frac{\partial x}{\partial\widetilde{x}}\right)\;,$$

og siden

$$\left|\det\!\left(\frac{\partial\widetilde{x}}{\partial x}\right)\right|\,\det\!\left(\frac{\partial x}{\partial\widetilde{x}}\right)=\pm 1\;,$$

med $+$ eller $-$ avhengig av om determinantene er positive eller negative, ser vi at

$$\int \mathrm{d}^3\widetilde{x}\,\epsilon^{\lambda\mu\nu}\widetilde{A}_\lambda\widetilde{F}_{\mu\nu}=\pm\int \mathrm{d}^3x\,\epsilon^{\lambda\mu\nu}A_\lambda F_{\mu\nu}\;.$$

Feltligningene er invariante under transformasjoner som lar virkningsintegralet invariant, og også under transformasjoner som forandrer fortegnet til *hele* virkningsintegralet. Men når en del av virkningsintegralet, og ikke hele, forandrer fortegn, er feltligningene ikke invariante.

2f) Dette følger ved direkte innsetting i ligningen $\epsilon^{\alpha\mu\nu}F_{\mu\nu,\alpha}=0$, og i Euler–Lagrange-ligningene under 1b).

2g) Vi antar, om nødvendig, at feltet er tidsuavhengig, ettersom kilden er det.
Når $b=0$, sier feltligningene da at

$$\frac{a}{c^2}\,\nabla\cdot\boldsymbol{E}=\rho\;,\qquad \frac{\partial B}{\partial x}=\frac{\partial B}{\partial y}=0\;.$$

Den magnetiske flukstettheten B er altså konstant, og selv om ligningene i og for seg tillater en hvilken som helst verdi, er det en verdi som peker seg ut som "naturlig", nemlig $B=0$.
Den gjenværende ligningen, som bestemmer det elektriske feltet $\boldsymbol{E}$, kan vi f.eks. integrere over en sirkel S om origo med radius r. Vi antar at feltet er rotasjonssymmetrisk, med radialkomponent E_r. Da er, i følge Gauss's setning,

$$\int_S \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\nabla\cdot\boldsymbol{E}=2\pi rE_r\;.$$

Og den integrerte feltligningen gir at

$$E_r=\frac{c^2}{2\pi ar}\int_S \mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\rho(x,y)\;.$$

For $r\leq R$ gir det at

$$E_r=\frac{c^2\rho_o r}{2a}\;.$$

Og for $r\geq R$ gir det at

$$E_r=\frac{c^2\rho_0R^2}{2ar}\;.$$

Når $a=0$ og $b\neq 0$, gir feltligningene direkte at

$$B=-\frac{c}{b}\,\rho\;,\qquad E_x=E_y=0\;.$$

Dersom både $a \neq 0$ og $b \neq 0$, gir to av feltligningene at

$$E_x = \frac{ac}{b} \frac{\partial B}{\partial x} , \qquad E_y = \frac{ac}{b} \frac{\partial B}{\partial y} .$$

Som innsatt i den gjenværende feltligningen gir at

$$\nabla^2 B - \frac{b^2}{a^2} B = \frac{bc}{a^2} \rho .$$

Dette er Klein–Gordon-ligningen, med kildeledd, i to romdimensjoner.
Koeffisienten b^2/a^2 representerer *fotonmassen*.
Mer presist: i følge denne teorien har fotonet en masse som er

$$M = \frac{\hbar \, |b|}{c \, |a|} .$$