Eksamen i klassisk feltteori, fag 74 350, 8. desember 1998
Løsninger

1a) Vi antar at

$$\frac{\mathrm{d}^2 x^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\mu_{\ \nu\lambda} \frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\lambda}{\mathrm{d}\tau} = 0 \,, \tag{1}$$

og at $c^2\,\mathrm{d}\tau^2 = g_{\mu\nu}\,\mathrm{d}x^\mu\,\mathrm{d}x^\nu$.
Så gjør vi en koordinattransformasjon $x^\mu \mapsto \widetilde{x}^\mu$, og skal vise at

$$\frac{\mathrm{d}^2 \widetilde{x}^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \widetilde{\Gamma}^\mu_{\ \nu\lambda} \frac{\mathrm{d}\widetilde{x}^\nu}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}\widetilde{x}^\lambda}{\mathrm{d}\tau} = 0 \,, \tag{2}$$

der $c^2\,\mathrm{d}\tau^2 = \widetilde{g}_{\mu\nu}\,\mathrm{d}\widetilde{x}^\mu\,\mathrm{d}\widetilde{x}^\nu$.
Ta definisjonsligningen for τ først. Vi har at

$$\widetilde{g}_{\mu\nu}\,\mathrm{d}\widetilde{x}^\mu\,\mathrm{d}\widetilde{x}^\nu = \left(\frac{\partial x^\alpha}{\partial \widetilde{x}^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial \widetilde{x}^\nu} g_{\alpha\beta}\right) \left(\frac{\partial \widetilde{x}^\mu}{\partial x^\gamma}\,\mathrm{d}x^\gamma\right) \left(\frac{\partial \widetilde{x}^\nu}{\partial x^\delta}\,\mathrm{d}x^\delta\right) = g_{\alpha\beta}\,\mathrm{d}x^\alpha\,\mathrm{d}x^\beta = c^2\,\mathrm{d}\tau^2 \,. \tag{3}$$

Vi har nemlig, for eksempel, at

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial \widetilde{x}^\mu} \frac{\partial \widetilde{x}^\mu}{\partial x^\gamma} = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x^\gamma} = \delta^\alpha_\gamma \,. \tag{4}$$

Så til ligning (2). Vi har at

$$\frac{\mathrm{d}\widetilde{x}^\mu}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial \widetilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau} \,, \tag{5}$$

og at

$$\frac{\mathrm{d}^2 \widetilde{x}^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} = \left(\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau} \frac{\partial \widetilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha}\right) \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\partial \widetilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} = \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau} \frac{\partial^2 \widetilde{x}^\mu}{\partial x^\beta\,\partial x^\alpha} \frac{\mathrm{d}x^\alpha}{\mathrm{d}\tau} + \frac{\partial \widetilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} \,. \tag{6}$$

Så har vi at

$$\begin{aligned} \widetilde{\Gamma}^\mu_{\ \nu\lambda} \frac{\mathrm{d}\widetilde{x}^\nu}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}\widetilde{x}^\lambda}{\mathrm{d}\tau} &= \left(\frac{\partial \widetilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \frac{\partial x^\beta}{\partial \widetilde{x}^\nu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \widetilde{x}^\lambda} \Gamma^\alpha_{\ \beta\gamma} - \frac{\partial x^\beta}{\partial \widetilde{x}^\nu} \frac{\partial x^\gamma}{\partial \widetilde{x}^\lambda} \frac{\partial^2 \widetilde{x}^\mu}{\partial x^\gamma\,\partial x^\beta}\right) \frac{\mathrm{d}\widetilde{x}^\nu}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}\widetilde{x}^\lambda}{\mathrm{d}\tau} \\ &= \left(\frac{\partial \widetilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \Gamma^\alpha_{\ \beta\gamma} - \frac{\partial^2 \widetilde{x}^\mu}{\partial x^\gamma\,\partial x^\beta}\right) \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}\tau} \,. \end{aligned} \tag{7}$$

Tilsammen gir det at

$$\frac{\mathrm{d}^2 \widetilde{x}^\mu}{\mathrm{d}\tau^2} + \widetilde{\Gamma}^\mu_{\ \nu\lambda} \frac{\mathrm{d}\widetilde{x}^\nu}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}\widetilde{x}^\lambda}{\mathrm{d}\tau} = \frac{\partial \widetilde{x}^\mu}{\partial x^\alpha} \left(\frac{\mathrm{d}^2 x^\alpha}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^\alpha_{\ \beta\gamma} \frac{\mathrm{d}x^\beta}{\mathrm{d}\tau} \frac{\mathrm{d}x^\gamma}{\mathrm{d}\tau}\right) = 0 \,. \tag{8}$$

Som vi skulle vise.

1b) Schwarzschild-metrikken er diagonal, og vi har at

$$
\begin{aligned}
g_{tt} &= \left(1-\frac{R}{r}\right)c^2 = \frac{r-R}{r}\,c^2\ , & g_{rr} &= -\frac{r}{r-R} = -1-\frac{R}{r-R}\ , \\
g_{\theta\theta} &= -r^2\ , & g_{\varphi\varphi} &= -r^2 sin^2\theta\ .
\end{aligned}
\tag{9}
$$

At radielle baner eksisterer, følger av bevegelsesligningene, men det følger også mer generelt av at Schwarzschild-metrikken er rotasjonsinvariant. Hvis nemlig hastigheten er radiell ved ett tidspunkt, må den fortsette å være radiell, den kan ikke skjære ut i noen ikkeradiell retning uten at det finnes noen påvirkning som bryter rotasjonsinvariansen. Eller sagt på en litt mer matematisk måte. Rotasjonsinvarians impliserer bevaring av impulsmomentet (dreieimpulsen) $\boldsymbol{L}$, som er proporsjonal med $\boldsymbol{r}\times\dot{\boldsymbol{r}}$. Hvis hastigheten $\dot{\boldsymbol{r}}$ er radiell ved ett tidspunkt, så er $\boldsymbol{L}=0$ ved dette tidspunktet, og siden $\boldsymbol{L}$ er bevart, må $\dot{\boldsymbol{r}}$ fortsette å være radiell.
Geodeseligningen for en radiell bane gir generelt at

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^r_{rr}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + 2\Gamma^r_{tr}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma^r_{tt}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 &= 0\ , \\
\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}\tau^2} + \Gamma^t_{rr}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + 2\Gamma^t_{tr}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} + \Gamma^t_{tt}\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 &= 0\ .
\end{aligned}
\tag{10}
$$

Siden den metriske tensoren $g_{\mu\nu}$ er diagonal, er $g^{\mu\nu}$ også diagonal, og vi har at

$$
\begin{aligned}
g^{tt} &= \frac{1}{g_{tt}} = \frac{r}{(r-R)c^2}\ , & g^{rr} &= \frac{1}{g_{rr}} = -\frac{r-R}{r}\ , \\
g^{\theta\theta} &= \frac{1}{g_{\theta\theta}} = -\frac{1}{r^2}\ , & g^{\varphi\varphi} &= \frac{1}{g_{\varphi\varphi}} = -\frac{1}{r^2 sin^2\theta}\ .
\end{aligned}
\tag{11}
$$

Videre er

$$
g_{tt,r} = \frac{R}{r^2}\,c^2\ , \qquad g_{rr,r} = \frac{R}{(r-R)^2}\ , \tag{12}
$$

og det gir at

$$
\begin{aligned}
\Gamma^t_{tt} &= \frac{1}{2}\,g^{tt}\,g_{tt,t} = 0\ , & \Gamma^t_{tr} &= \frac{1}{2}\,g^{tt}\,g_{tt,r} = \frac{R}{2r(r-R)}\ , \\
\Gamma^t_{rr} &= -\frac{1}{2}\,g^{tt}\,g_{rr,t} = 0\ , & & \qquad (13) \\
\Gamma^r_{tt} &= -\frac{1}{2}\,g^{rr}\,g_{tt,r} = \frac{R(r-R)}{2r^3}\,c^2\ , & \Gamma^r_{tr} &= \frac{1}{2}\,g^{rr}\,g_{rr,t} = 0\ , \\
\Gamma^r_{rr} &= \frac{1}{2}\,g^{rr}\,g_{rr,r} = -\frac{R}{2r(r-R)}\ . & & \qquad (14)
\end{aligned}
$$

Som var det vi skulle vise.
Ligningen for t er

$$
\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}\tau^2} + \frac{R}{r(r-R)}\,\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\,\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} = 0\ . \tag{15}
$$

Siden $R/r \approx 10^{-9}$ i Nidarøhallen, virker det ganske rimelig her å neglisjere det andre leddet på venstre side, og altså konstatere at med god tilnærming er

$$\frac{\mathrm{d}^2 t}{\mathrm{d}\tau^2} = 0\ . \tag{16}$$

For å rettferdiggjøre dette mer eksplisitt, kan vi dividere ligning (15) med $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$ og dermed skrive den som

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\tau}\left[\ln\!\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)\right] + \left(\frac{1}{r-R} - \frac{1}{r}\right)\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau} = 0\ . \tag{17}$$

Denne ligningen kan vi integrere så vi får at

$$\ln\!\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right) + \ln\!\left(\frac{r-R}{r}\right) = \text{konstant}\ . \tag{18}$$

Her er $(r-R)/r = 1$, med en nøyaktighet på 10^{-9}, altså kan vi regne at

$$\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau} = \text{konstant}\ . \tag{19}$$

Ligningen for r er

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}\tau^2} - \frac{R}{2r(r-R)}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 + \frac{R(r-R)}{2r^3}\,c^2\left(\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}\tau}\right)^2 = 0\ . \tag{20}$$

Eller, når vi regner $\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau$ konstant og dividerer med $(\mathrm{d}t/\mathrm{d}\tau)^2$,

$$\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} - \frac{R}{2r(r-R)}\left(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{R(r-R)}{2r^3}\,c^2 = 0\ . \tag{21}$$

Så lenge hastigheten $\mathrm{d}r/\mathrm{d}t$ er mye mindre enn lyshastigheten c, kan vi neglisjere det midterste leddet her, og vi får da at tyngdens akselerasjon er

$$g = -\frac{\mathrm{d}^2 r}{\mathrm{d}t^2} \approx \frac{R(r-R)}{2r^3}\,c^2 \approx \frac{R}{2r^2}\,c^2 = \frac{GM}{r^2} = \frac{8{,}87\,\mathrm{mm}}{2\times(6360\,\mathrm{km})^2}\,c^2 = 9{,}85\,\mathrm{m/s^2}\ . \tag{22}$$

2a) Bevegelsesligningen for z er

$$\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}s^2} = -\frac{1}{c^2}\,\phi_{,z}\left[\left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\right)^2 + \delta_{kl}\,\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}x^l}{\mathrm{d}s}\right] + \frac{2}{c^2}\,\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}\ . \tag{23}$$

Betingelsen for at $z = 0$ skal være en løsning av den, er at

$$\phi_{,z} = \frac{\partial\phi}{\partial z} = 0 \tag{24}$$

langs hele banen som lysstrålen følger. En tilstrekkelig betingelse er f.eks. at $\phi_{,z} = 0$ i hele planet $z = 0$.
Ligningen for x^0 kan skrives som

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}s}\left[\ln\!\left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\right)\right] = -\frac{2}{c^2}\,\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s}\ . \tag{25}$$

Den kan da integreres, og gir at

$$\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s} = K\mathrm{e}^{-\frac{2\phi}{c^2}} \approx K\left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right) , \tag{26}$$

for en vilkårlig integrasjonskonstant K. Verdien av K spiller ingen rolle, og vi kan f.eks. velge $K = c$.
For et lyssignal gjelder at

$$g_{\mu\nu}\,\frac{\mathrm{d}x^\mu}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}x^\nu}{\mathrm{d}s} = \left(1 + \frac{2\phi}{c^2}\right)\left(\frac{\mathrm{d}x^0}{\mathrm{d}s}\right)^2 - \left(1 - \frac{2\phi}{c^2}\right)\delta_{jk}\,\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s} = 0 \;. \tag{27}$$

Innsatt ligning (26) med $K = c$ gir det, til orden ϕ/c^2, at

$$\delta_{jk}\,\frac{\mathrm{d}x^j}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}x^k}{\mathrm{d}s} = c^2 \;. \tag{28}$$

Til orden ϕ/c^2 gir det bevegelsesligningene

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2} &= -2\,\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{2}{c^2}\,\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} \;, \\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}s^2} &= -2\,\frac{\partial\phi}{\partial y} + \frac{2}{c^2}\,\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}s} \;. \end{aligned} \tag{29}$$

Om vi setter inn på høyre side her en prøveløsning $x = cs$, $y = y_0 =$ konstant, $z = 0$, så får vi ligningene

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}s^2} &= -2\,\frac{\partial\phi}{\partial x} + \frac{2}{c^2}\,\frac{\partial\phi}{\partial x}\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right)^2 = 0 \;, \\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}s^2} &= -2\,\frac{\partial\phi}{\partial y} \;. \end{aligned} \tag{30}$$

Som kan sammenlignes med Newtons ligninger for en partikkel med lyshatigheten, der t er tiden,

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} &= -\frac{\partial\phi}{\partial x} \;, \\ \frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} &= -\frac{\partial\phi}{\partial y} \;. \end{aligned} \tag{31}$$

Den vesentlige forskjellen er en faktor 2 i akselerasjonen i y-retningen (akselerasjonen i x-retningen er i alle fall ubetydelig sammenlignet med hastigheten c).

2b) Dersom vi setter inn den tilnærmete løsningen $x = cs$, $y = y_0 =$ konstant, $z = 0$, og potensialet

$$\phi = -\frac{GM}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}} \;, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y} = \frac{GMy}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}} = \frac{GMy_0}{(c^2s^2+{y_0}^2)^{3/2}} \;, \tag{32}$$

så har ligning (30) følgende løsning for forandringen i $\mathrm{d}y/\mathrm{d}s$,

$$\Delta\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right) = \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right|_{s=\infty} - \left.\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right|_{s=-\infty} = -2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}s\,\frac{GMy_0}{(c^2s^2+{y_0}^2)^{3/2}} = -\frac{4GM}{cy_0} \;. \tag{33}$$

Avbøyningsvinkelen er liten, og er lik

$$\alpha = \Delta\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}s}\right)\Big/\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}s}\right) = -\frac{4GM}{c^2 y_0}\ . \tag{34}$$

Innsatt Jupiters masse og radius, $M = M_J = 1,90 \times 10^{27}$ kg og $y_0 = r_J = 7,19 \times 10^7$ m, får vi at

$$|\alpha| = 7,85 \times 10^{-8} = 0,0162''\ . \tag{35}$$

3) Transformasjonen $\phi \mapsto \widetilde{\phi} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}\phi$, med β en reell konstant, gir at

$$\widetilde{\phi} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}\phi\ , \qquad \widetilde{\phi}_{,\mu} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}\phi_{,\mu}\ , \qquad \widetilde{\phi}^* = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\phi^*\ , \qquad \widetilde{\phi}^*_{,\mu} = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\phi^*_{,\mu}\ . \tag{36}$$

Setter vi inn $\widetilde{\phi}$ i stedet for ϕ i Lagrange-tettheten $\mathcal{L}$, får vi dermed at $\widetilde{\mathcal{L}} = \mathcal{L}$. Men det impliserer at transformasjonen $\phi \mapsto \widetilde{\phi}$ er en symmetri.
En annen måte å se det samme på, er å skrive opp Euler–Lagrange-ligningen

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\mu}\left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*_{,\mu}}\right) = 0\ . \tag{37}$$

Da ser vi (vi kan til og med se det av formen til Lagrange-tettheten, uten å skrive opp Euler–Lagrange-ligningen eksplisitt) at ligningen ikke inneholder ϕ^*, samtidig som den er en lineær differensialligning for ϕ. Men at den er lineær, impliserer pr. definisjon at den er invariant under $\phi \mapsto \widetilde{\phi} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}\phi$ med β konstant.
La nå β være infinitesimal, da er

$$\widetilde{\phi} = \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta}\phi = (1 - \mathrm{i}\beta)\phi = \phi + \Delta\phi\ , \qquad \widetilde{\phi}^* = \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta}\phi^* = (1 + \mathrm{i}\beta)\phi^* = \phi^* + \Delta\phi^*\ , \tag{38}$$

med

$$\Delta\phi = -\mathrm{i}\beta\phi\ , \qquad \Delta\phi^* = \mathrm{i}\beta\phi^*\ . \tag{39}$$

Siden $\mathcal{L}$ er invariant, dvs. at $\Delta\mathcal{L} = 0$, har vi da, i følge Noethers teorem, at

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\rho}\left(\Delta\phi\,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi_{,\rho}} + \Delta\phi^*\,\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \phi^*_{,\rho}}\right) = 0\ . \tag{40}$$

Som eksplisitt skrevet ut gir at

$$\frac{\partial}{\partial x^\rho}\left[-\mathrm{i}\beta\phi\sqrt{|g|}\,g^{\mu\rho}\left(\phi^*_{,\mu} - \mathrm{i}\,\frac{q}{\hbar}\,A_\mu\phi^*\right) + \mathrm{i}\beta\phi^*\sqrt{|g|}\,g^{\rho\nu}\left(\phi_{,\nu} + \mathrm{i}\,\frac{q}{\hbar}\,A_\nu\phi\right)\right] = 0\ . \tag{41}$$

Vi kan dividere med β, og da er dette kontinuitetsligningen $j^\rho_{,\rho} = 0$, med

$$\begin{aligned} j^\rho &= -\mathrm{i}\sqrt{|g|}\,g^{\rho\nu}\left[\phi\left(\phi^*_{,\nu} - \mathrm{i}\,\frac{q}{\hbar}\,A_\nu\phi^*\right) - \phi^*\left(\phi_{,\nu} + \mathrm{i}\,\frac{q}{\hbar}\,A_\nu\phi\right)\right]. \\ &= -2\,\mathrm{Im}\left[\sqrt{|g|}\,g^{\rho\nu}\,\phi^*\left(\phi_{,\nu} + \mathrm{i}\,\frac{q}{\hbar}\,A_\nu\phi\right)\right]. \end{aligned} \tag{42}$$

Dette kan vi sammenligne med den elektromagnetiske strømtettheten, definert som

$$j^\rho_{\mathrm{em}} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\rho} = -\frac{q}{\hbar}\,j^\rho\ . \tag{43}$$

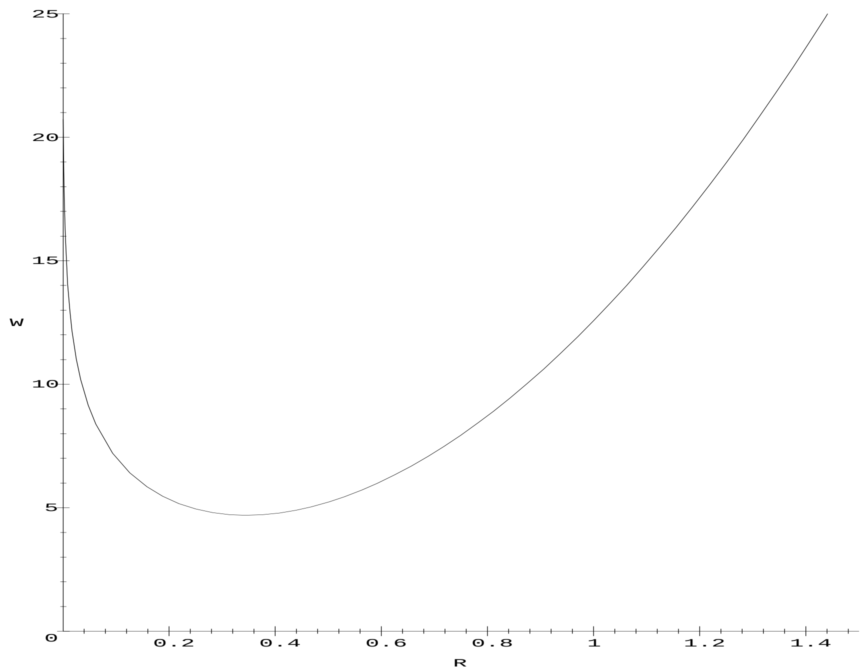
Vi ser at de to strømtetthetene er proporsjonale.
Med andre ord: invarians under globale gauge-transformasjoner impliserer bevaring av elektrisk ladning.

4a) Med $V = 4\pi R^3/3$ og $A = 4\pi R^2$ er

$$W = -\lambda \ln\left(\frac{V}{V_0}\right) + \sigma A = -3\lambda \ln\left(\frac{R}{R_0}\right) + 4\pi\sigma R^2 + \text{konstant} \ , \tag{44}$$

der R_0 er en eller annen konstant.

Kurven for $W(R)$ har følgende form, med vilkårlig skalering på aksene:



Euler–Lagrange-ligningen blir:

$$0 = \frac{\partial L}{\partial R} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{R}}\right) = -\frac{3\lambda}{R} + 8\pi\sigma R - m\ddot{R} \ . \tag{45}$$

4b) Med $R(t) = R_0 =$ konstant blir $\dot{R} = 0$ og $\ddot{R} = 0$, og for at bevegelsesligningen ovenfor skal oppfylles, må da

$$0 = W'(R_0) = -\frac{3\lambda}{R_0} + 8\pi\sigma R_0 \ . \tag{46}$$

Som vil si at

$$R_0 = \sqrt{\frac{3\lambda}{8\pi\sigma}} \ . \tag{47}$$

Siden Lagrange-funksjonen L ikke avhenger eksplisitt av tiden t, er energien

$$E = \frac{m\dot{R}^2}{2} + W = \frac{m\dot{R}^2}{2} - 3\lambda \ln\left(\frac{R}{R_0}\right) + 4\pi\sigma R^2 + \text{konstant} \tag{48}$$

bevart. At E er konstant, dvs. at $\dot{E} = 0$, følger forøvrig direkte fra definisjonen og fra bevegelsesligningen.
Siden E er konstant, siden $\dot{R}^2 \geq 0$, og dessuten $W(R)$ ser ut som i figuren ovenfor, kan $R(t)$ bare variere mellom en nedre og en øvre grense. Bevegelsen er alltid en oscillasjon omkring likevektsverdien R_0.
Det betyr at likevektsløsningen $R(t) = R_0$ er stabil: hvis vi perturberer den en liten smule, fører det bare til små oscillasjoner omkring R_0. Vel å merke, foreløpig vet vi ingenting om hva som skjer dersom vi deformerer boblen på en slik måte at den ikke lenger er kulesymmetrisk.

4c) Den oppgitte Lagrange-funksjonen er

$$\begin{aligned} L = {} & \frac{m}{2}\,\dot{R}^2 + 3\lambda \ln\left(\frac{R}{R_0}\right) - 4\pi\sigma R^2 + \frac{m}{8\pi}\int \mathrm{d}\Omega \left[\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)^2 - 4\,\frac{\dot{R}}{R}\,\rho\,\frac{\partial\rho}{\partial t} + 2\,\frac{\dot{R}^2}{R^2}\,\rho^2\right] \\ & + \sigma \int \mathrm{d}\Omega \left[\rho^2 - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2 - \frac{1}{2\sin^2\theta}\left(\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\right)^2\right] . \end{aligned} \tag{49}$$

Euler–Lagrange-ligningen for $R(t)$,

$$\frac{\partial L}{\partial R} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{R}}\right) = 0 \,, \tag{50}$$

ser ut som følger:

$$\begin{aligned} & \frac{3\lambda}{R} - 8\pi\sigma R + \frac{m}{8\pi}\int \mathrm{d}\Omega \left[4\,\frac{\dot{R}}{R^2}\,\rho\,\frac{\partial\rho}{\partial t} - 4\,\frac{\dot{R}^2}{R^3}\,\rho^2\right] \\ & -m\ddot{R} - \frac{m}{8\pi}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int \mathrm{d}\Omega \left[-4\,\frac{1}{R}\,\rho\,\frac{\partial\rho}{\partial t} + 4\,\frac{\dot{R}}{R^2}\,\rho^2\right] = 0 \,. \end{aligned} \tag{51}$$

Eller, litt omskrevet,

$$m\ddot{R} - \frac{3\lambda}{R} + 8\pi\sigma R - \frac{m}{2\pi}\int \mathrm{d}\Omega \left[\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{R}\,\rho\,\frac{\partial\rho}{\partial t} - \frac{\dot{R}}{R^2}\,\rho^2\right) + \frac{\dot{R}}{R^2}\,\rho\,\frac{\partial\rho}{\partial t} - \frac{\dot{R}^2}{R^3}\,\rho^2\right] = 0 \,. \tag{52}$$

Vi kan forenkle litt videre ved å bruke at

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{1}{R}\right) = -\frac{\dot{R}}{R^2} \,. \tag{53}$$

Da får vi at

$$m\ddot{R} - \frac{3\lambda}{R} + 8\pi\sigma R - \frac{m}{2\pi}\int \mathrm{d}\Omega\,\frac{1}{R}\,\frac{\partial}{\partial t}\left(\rho\,\frac{\partial\rho}{\partial t} - \frac{\dot{R}}{R^2}\,\rho^2\right) = 0 \,. \tag{54}$$

For å finne Euler–Lagrange-ligningene for $\rho(\theta, \varphi, t)$ skriver vi

$$L = \int \mathrm{d}\Omega\ \mathcal{L}_0 = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\ \sin\theta\ \mathcal{L}_0 = \int_0^{2\pi} \mathrm{d}\varphi \int_0^{\pi} \mathrm{d}\theta\ \mathcal{L}\ , \tag{55}$$

med

$$\begin{aligned}
\mathcal{L} &= \sin\theta\, \mathcal{L}_0 \\
&= \sin\theta \left\{ \frac{m}{8\pi}\, \dot{R}^2 + \frac{3\lambda}{4\pi}\, \ln\!\left(\frac{R}{R_0}\right) - \sigma R^2 + \frac{m}{8\pi} \left[\left(\frac{\partial\rho}{\partial t}\right)^2 - 4\, \frac{\dot{R}}{R}\, \rho\, \frac{\partial\rho}{\partial t} + 2\, \frac{\dot{R}^2}{R^2}\, \rho^2 \right] \right. \\
&\quad \left. +\sigma \left[\rho^2 - \frac{1}{2} \left(\frac{\partial\rho}{\partial\theta}\right)^2 - \frac{1}{2\sin^2\!\theta} \left(\frac{\partial\rho}{\partial\varphi}\right)^2 \right] \right\} .
\end{aligned} \tag{56}$$

Euler–Lagrange-ligningene for ρ blir da:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\rho} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\rho_{,\theta}}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\varphi} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\rho_{,\varphi}}\right) - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\rho_{,t}}\right) = 0\ . \tag{57}$$

Som gir, helt eksplisitt, at

$$\begin{aligned}
\sin\theta \left[\frac{m}{8\pi} \left(-4\, \frac{\dot{R}}{R}\, \frac{\partial\rho}{\partial t} + 4\, \frac{\dot{R}^2}{R^2}\, \rho \right) + 2\sigma\rho \right] + \sigma\, \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta\, \frac{\partial\rho}{\partial\theta} \right) + \frac{\sigma}{\sin\theta}\, \frac{\partial^2\rho}{\partial\varphi^2} \\
- \sin\theta\, \frac{m}{8\pi}\, \frac{\partial}{\partial t} \left(2\, \frac{\partial\rho}{\partial t} - 4\, \frac{\dot{R}}{R}\, \rho \right) = 0\ .
\end{aligned} \tag{58}$$

Etter litt opprydding gir det at

$$\frac{m}{4\pi} \left(\frac{\partial^2\rho}{\partial t^2} - 2\, \frac{\ddot{R}}{R}\, \rho \right) - 2\sigma\rho - \frac{\sigma}{\sin\theta}\, \frac{\partial}{\partial\theta} \left(\sin\theta\, \frac{\partial\rho}{\partial\theta} \right) - \frac{\sigma}{\sin^2\!\theta}\, \frac{\partial^2\rho}{\partial\varphi^2} = 0\ . \tag{59}$$

4d) Lagrange-funksjonen er ikke eksplisitt avhengig av t, det gir at bevegelsesligningene er invariante under tidstranslasjon, og Noethers teorem gir at energien er bevart.
Lagrange-funksjonen er heller ikke eksplisitt avhengig av φ, det gir at bevegelsesligningene er invariante under rotasjon om z-aksen, og Noethers teorem gir at impulsmomentet (dreieimpulsen) om z-aksen er bevart.
Men z-aksen er jo nokså tilfeldig valgt, altså har vi rotasjonsinvarians om en vilkårlig akse, og alle komponenter av impulsmomentet er bevart. En annen metode for å resonnere seg fram til denne konklusjonen, er å si at den potensielle energien avhenger bare av volumet og arealet, som begge er rotasjonsinvariante.
Diskrete symmetrier, som ikke gir noen bevaringslover ut fra Noethers teorem, er tidsreversjonssymmetri ($t \mapsto -t$) og paritetsinvarians (speilingssymmetri om planet $z = 0$, dvs. at $\theta \mapsto \pi - \theta$, eller om en vil, speilingssymmetri om origo, dvs. at $\theta \mapsto \pi - \theta$, $\varphi \mapsto \varphi \pm \pi$).

4e) Når

$$\rho(\theta, \varphi, t) = \psi(t)\, (3\cos^2\!\theta - 1)\ , \tag{60}$$

så er

$$\frac{\partial\rho}{\partial\theta} = -6\psi\cos\theta\,\sin\theta\;, \qquad \frac{\partial\rho}{\partial\varphi} = 0\;, \qquad \frac{\partial\rho}{\partial t} = \dot{\psi}(3\cos^2\theta - 1)\;. \tag{61}$$

Det er da "bare" å sette inn i Lagrange-funksjonen, ligning (3) i oppgaveteksten, og integrere.

4f) Euler–Lagrange-ligningen for R:

$$\begin{aligned} &\frac{3\lambda}{R} - 8\pi\sigma R + \frac{2m}{5}\left(4\,\frac{\dot{R}}{R^2}\,\psi\,\dot{\psi} - 4\,\frac{\dot{R}^2}{R^3}\,\psi^2\right) \\ &\quad -m\ddot{R} - \frac{2m}{5}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(-4\,\frac{1}{R}\,\psi\,\dot{\psi} + 4\,\frac{\dot{R}}{R^2}\,\psi^2\right) \;=\; 0\;. \end{aligned} \tag{62}$$

Som kan omskrives slik:

$$m\ddot{R} - \frac{8m}{5R}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\psi\,\dot{\psi} - \frac{\dot{R}}{R}\,\psi^2\right) - \frac{3\lambda}{R} + 8\pi\sigma R = 0\;. \tag{63}$$

Og Euler–Lagrange-ligningen for ψ:

$$\frac{2m}{5}\left(-4\,\frac{\dot{R}}{R}\,\dot{\psi} + 4\,\frac{\dot{R}^2}{R^2}\,\psi\right) - \frac{64\pi\sigma}{5}\,\psi - \frac{2m}{5}\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(2\dot{\psi} - 4\,\frac{\dot{R}}{R}\,\psi\right) = 0\;. \tag{64}$$

Som kan omskrives slik:

$$m\left(\ddot{\psi} - 2\,\frac{\ddot{R}}{R}\,\psi\right) + 16\pi\sigma\psi = 0\;. \tag{65}$$

Disse to ligningene for $R(t)$ og $\psi(t)$ gir en nødvendig, men ikke *uten videre* tilstrkkelig, betingelse for at $\rho(\theta,\varphi,t) = \psi(t)\,(3\cos^2\theta - 1)$, sammen med $R(t)$, skal være en løsning av det fulle settet ligninger.
Det vi kan si, er at hvis det finnes en løsning av den formen vi har antatt, så er virkningsintegralet ekstremalt for denne løsningen, og dersom virkningsintegralet er ekstremalt, så må ligningene (63) og (65) være oppfylt.
Men det er jo ikke uten videre noen grunn til at de fulle ligningene skal ha noen løsning av den formen som vi (tilsynelatende) har hentet rett ut av luften.
For å studere stabiliteten til løsningen $R(t) = R_0$, $\psi(t) = 0$, kan vi se på små avvik fra denne. Dvs. at vi antar at $R(t) = R_0 + \delta R(t)$, der $\delta R(t)$ er liten, og dessuten at ψ er liten.
Vi får da følgende to ligninger:

$$\begin{aligned} m\,\delta\ddot{R} + \left(\frac{3\lambda}{{R_0}^2} + 8\pi\sigma\right)\delta R \;&=\; 0\;, \\ m\ddot{\psi} + 16\pi\sigma\psi \;&=\; 0\;. \end{aligned} \tag{66}$$

Som har oscillatoriske (og ikke eksponensielt voksende) løsninger.
Det viser at såpeboblen er stabil mot kvadrupoldeformasjoner.