Eksamen i klassisk feltteori, fag 74 350, 24. november 1999
Løsninger

1a) Euler–Lagrange-ligningen kan skrives på formen

$$\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}}\right) = 0 \; ,$$

der $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{r}(t)$ er posisjonen til partikkelen, som funksjon av tiden t, og $\boldsymbol{v} = \dot{\boldsymbol{r}} = \mathrm{d}\boldsymbol{v}/\mathrm{d}t$. Utregnet gir det vektorligningen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(m\gamma\boldsymbol{v}) = q\,(\boldsymbol{E} + \boldsymbol{v} \times \boldsymbol{B}) \; .$$

med

$$\gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \; .$$

Om vi innfører akselerasjonen $\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}}$, har vi at

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(m\gamma\boldsymbol{v}) = m\gamma\boldsymbol{a} + \frac{m\gamma^3\boldsymbol{v}(\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{a})}{c^2} \; .$$

Videre er

$$\boldsymbol{E} = -\nabla\Phi - \frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} \; , \qquad \boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A} \; ,$$

altså helt eksplisitt:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \; , \qquad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \; , \qquad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \; .$$

Den tredimensjonale vektorligningen ovenfor er en forkortet skrivemåte for tre ligninger, en for hver av de tre partikkelkoordinatene $x = x(t)$, $y = y(t)$ og $z = z(t)$.
La oss ta for oss mer detaljert ligningen for x:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \mathrm{d}t\left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}}\right) = -q\,\frac{\partial \Phi}{\partial x} + q\boldsymbol{v}\cdot\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial x} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(m\gamma\dot{x} + qA_x) = 0 \; .$$

Her er

$$\frac{\mathrm{d}A_x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,A_x(x(t),y(t),z(t),t) = \frac{\partial A_x}{\partial x}\,\dot{x} + \frac{\partial A_x}{\partial y}\,\dot{y} + \frac{\partial A_x}{\partial z}\,\dot{z} + \frac{\partial A_x}{\partial t} = \boldsymbol{v}\cdot\nabla A_x + \frac{\partial A_x}{\partial t} \; ,$$

og det gir ligningen

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\,(m\gamma\dot{x}) = q\,(E_x + \dot{y}B_z - \dot{z}B_y) \; .$$

Som er første komponent (x-komponenten) av vektorligningen vår.

1b) Anta at $\Phi = 0$, og at $B_x = B_y = 0$, $B_z = B =$ konstant $\neq 0$. Vi antar også at $\boldsymbol{A}$ ikke er eksplisitt tidsavhengig, slik at $\boldsymbol{E} = 0$ — dette burde ha vært presisert i oppgaveteksten.
Det mest generelle vektorpotensialet som er konstant i tiden, og som gir denne magnetiske flukstettheten $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$, er:

$$A_x = \frac{\partial \chi}{\partial x} \; , \qquad A_y = Bx + \frac{\partial \chi}{\partial y} \; , \qquad A_z = \frac{\partial \chi}{\partial z} \; ,$$

der $\chi = \chi(x, y, z)$ er en vilkårlig funksjon som er uavhengig av tiden t.
Systemet har følgende kontinuerlige symmetrier, med tilhørende bevaringslover:

- Tidstranslasjonssymmetri, som impliserer energibevaring.
- Romtranslasjonssymmetri, som impliserer impulsbevaring.
- Rotasjonssymmetri om z-aksen, som impliserer bevaring av impulsmoment (dreieimpuls) om z-aksen.

Systemet har dessuten to diskrete symmetrier, som ikke impliserer bevaringslover:

- Paritetssymmetri: Lagrange-funksjonen er invariant under transformasjonen $\boldsymbol{r} \mapsto \widetilde{\boldsymbol{r}} = -\boldsymbol{r}$, $\boldsymbol{A} \mapsto \widetilde{\boldsymbol{A}}$, der $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ er definert ved at $\widetilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r},t) = -\boldsymbol{A}(-\boldsymbol{r},t)$. Med $\boldsymbol{A}$ gitt som ovenfor, har vi at
$$\widetilde{A}_x = \frac{\partial\widetilde{\chi}}{\partial x}\;, \qquad \widetilde{A}_y = Bx + \frac{\partial\widetilde{\chi}}{\partial y}\;, \qquad \widetilde{A}_z = \frac{\partial\widetilde{\chi}}{\partial z}\;,$$
der $\widetilde{\chi}(x,y,z) = \chi(-x,-y,-z)$. Den magnetiske flukstettheten er paritetsinvariant:
$$\widetilde{B}_x = \widetilde{B}_y = 0\;, \qquad \widetilde{B}_z = B\;.$$
- Tidsreversjonssymmetri: Lagrange-funksjonen er også invariant under transformasjonen $t \mapsto \widetilde{t} = -t$, $\boldsymbol{A} \mapsto \widetilde{\boldsymbol{A}}$, der $\widetilde{\boldsymbol{A}}$ er definert ved at $\widetilde{\boldsymbol{A}}(\boldsymbol{r},t) = -\boldsymbol{A}(\boldsymbol{r},-t)$. Siden vi forutsetter at $\boldsymbol{A}$ er uavhengig av t, har vi simpelthen at $\widetilde{\boldsymbol{A}} = -\boldsymbol{A}$. Den magnetiske flukstettheten reverseres ved en tidsreversjon:
$$\widetilde{\boldsymbol{B}} = \nabla \times \widetilde{\boldsymbol{A}} = -\nabla \times \boldsymbol{A} = -\boldsymbol{B}\;.$$

Merk at de tre bevegelsesligningene,
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\gamma\dot{x}) - q\dot{y}B = 0\;, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\gamma\dot{y}) + q\dot{x}B = 0\;, \qquad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(m\gamma\dot{z}) = 0\;,$$
er hverken mer eller mindre enn bevaringslover for de tre størrelsene
$$m\gamma\dot{x} - qBy\;, \qquad m\gamma\dot{y} + qBx\;, \qquad m\gamma\dot{z}\;.$$
De samme bevarte størrelsene utleder vi ved å bruke translasjonsinvarians og Noethers teorem. La oss ta for oss litt mer utførlig alle de kontinuerlige symmetriene.
I bevegelsesligningen opptrer feltene $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$, ikke Φ og $\boldsymbol{A}$ direkte. Siden $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$ er konstante i tid og rom, er det klart at bevegelsesligningen er invariant under vilkårlige translasjoner i tid og rom. Med $\boldsymbol{E} = 0$ og $\boldsymbol{B}$ langs z-aksen er både $\boldsymbol{E}$ og $\boldsymbol{B}$ invariante under rotasjoner om z-aksen, slik at disse rotasjonene også er symmetrier.
For å bruke Noethers teorem, som gir bevaringslovene, trenger vi et eksplisitt uttrykk for Lagrange-funksjonen:
$$L = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + q\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A} = -mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} + qB\dot{y}x + q\,\frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t}\;,$$
der vi har satt inn
$$\boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{A} = \dot{y}Bx + \boldsymbol{v}\cdot\nabla\chi = B\dot{y}x + \frac{\mathrm{d}\chi}{\mathrm{d}t}\;.$$

Dessuten trenger vi et uttrykk for den kanoniske impulsen:

$$\boldsymbol{p} = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} = m\gamma\boldsymbol{v} + q\boldsymbol{A} \; .$$

Ta først en infinitesimal tidstranslasjon, $t \mapsto \widetilde{t} = t + \alpha$, der α er en infinitesimal parameter av dimensjon tid. Den transformerer banen til partikkelen, $\boldsymbol{r}(t)$, over i en ny bane $\widetilde{\boldsymbol{r}}(t) = \boldsymbol{r}(t) + \Delta\boldsymbol{r}(t)$, gitt ved at $\Delta\boldsymbol{r} = -\alpha\boldsymbol{v}$. Forandringen i hastigheten er $\Delta\boldsymbol{v} = -\alpha\boldsymbol{a}$, der $\boldsymbol{a} = \dot{\boldsymbol{v}}$ er akselerasjonen, og det gir at

$$\Delta L = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{r}} \cdot (\Delta\boldsymbol{r}) + \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} \cdot (\Delta\boldsymbol{v}) = \frac{\mathrm{d}\Delta M}{\mathrm{d}t} \; ,$$

med $\Delta M = -\alpha L$. Noethers teorem gir, som vanlig ved tidstranslasjonssymmetri, at Hamiltonfunksjonen H er bevart,

$$H = \frac{\partial L}{\partial \boldsymbol{v}} \cdot \boldsymbol{v} - L = \frac{mv^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} + mc^2\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = \frac{mc^2}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}} = m\gamma c^2 \; .$$

En infinitesimal translasjon i x-retningen, $x \mapsto x + \alpha$ der α er en infinitesimal parameter av dimensjon lengde, gir

$$\Delta L = qB\dot{y}\alpha + q\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\,\alpha\right) = \frac{\mathrm{d}\Delta M}{\mathrm{d}t} \; ,$$

med

$$\Delta M = \alpha\left(qBy + q\,\frac{\partial\chi}{\partial x}\right) \; .$$

Den bevarte størrelsen er da (etter at α er dividert bort)

$$p_x - qBy - q\,\frac{\partial\chi}{\partial x} = m\gamma\dot{x} - qBy \; .$$

En infinitesimal translasjon i y-retningen, $y \mapsto y + \alpha$, gir

$$\Delta L = q\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\chi}{\partial y}\,\alpha\right) = \frac{\mathrm{d}\Delta M}{\mathrm{d}t} \; ,$$

med

$$\Delta M = \alpha q\,\frac{\partial\chi}{\partial y} \; .$$

Den bevarte størrelsen, i følge Noethers teorem, er da

$$p_y - q\,\frac{\partial\chi}{\partial y} = m\gamma\dot{y} + qBx \; .$$

En infinitesimal translasjon i z-retningen, $z \mapsto z + \alpha$, gir

$$\Delta M = \alpha q\,\frac{\partial\chi}{\partial z} \; .$$

Den bevarte størrelsen er da

$$p_z - q\,\frac{\partial\chi}{\partial z} = m\gamma\dot{z} \; .$$

En infinitesimal rotasjon om z-aksen,

$$x \mapsto x - \alpha y \;, \qquad y \mapsto y + \alpha x \;,$$

med α en infinitesimal rotasjonsvinkel, gir

$$\Delta L = qB((\alpha\dot{x})x + \dot{y}(-\alpha y)) + q\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{\partial\chi}{\partial x}\,(-\alpha y) + \frac{\partial\chi}{\partial x}\,(\alpha x)\right) = \frac{\mathrm{d}\Delta M}{\mathrm{d}t} \;,$$

med

$$\Delta M = \alpha\left(\frac{qB}{2}\,(x^2 - y^2) + q\left(-\frac{\partial\chi}{\partial x}\,y + \frac{\partial\chi}{\partial x}\,x\right)\right) \;.$$

Husk at v^2 er rotasjonsinvariant:

$$\Delta v^2 = \Delta(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) = 2(\dot{x}(\Delta\dot{x}) + \dot{y}(\Delta\dot{y}) + \dot{z}(\Delta\dot{z})) = 2(\dot{x}(-\alpha\dot{y}) + \dot{y}(\alpha\dot{x})) = 0 \;.$$

Den bevarte størrelsen, i følge Noethers teorem, er da

$$-p_x y + p_y x - \frac{qB}{2}\,(x^2 - y^2) - q\left(-\frac{\partial\chi}{\partial x}\,y + \frac{\partial\chi}{\partial x}\,x\right) = m\gamma(-\dot{x}y + \dot{y}x) + \frac{qB}{2}\,(x^2 + y^2) \;.$$

Merk at alle de bevarte størrelsene er gauge-invariante, i den forstand at de ikke avhenger av den vilkårlige funksjonen $\chi = \chi(x, y, z)$.

2a) Det er fire Euler–Lagrange-ligninger,

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial V^\gamma} - \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x^\kappa}\left(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial V^\gamma{}_{,\kappa}}\right) = 0 \;,$$

der γ er enten 0, 1, 2 eller 3. Vi har at

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial V^\gamma} = 0 \;,$$

og at

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial V^\gamma{}_\kappa} &= \frac{1}{2}\left(\eta_{\alpha\beta}\,\eta^{\mu\nu}\left(\delta^\alpha_\gamma\,\delta^\kappa_\mu\,V^\beta{}_{,\nu} + V^\alpha{}_{,\mu}\,\delta^\beta_\gamma\,\delta^\kappa_\nu\right) - \delta^\rho_\gamma\,\delta^\kappa_\sigma\,V^\sigma{}_{,\rho} - V^\rho{}_{,\sigma}\,\delta^\sigma_\gamma\,\delta^\kappa_\rho\right) \\
&= \eta_{\gamma\beta}\,\eta^{\kappa\nu}\,V^\beta{}_{,\nu} - V^\kappa{}_{,\gamma} \;.
\end{aligned}$$

Euler–Lagrange-ligningene blir altså ganske enkelt disse fire:

$$\frac{\partial}{\partial x^\kappa}\left(\eta_{\gamma\beta}\,\eta^{\kappa\nu}\,V^\beta{}_{,\nu} - V^\kappa{}_{,\gamma}\right) = \eta_{\gamma\beta}\,\eta^{\kappa\nu}\,V^\beta{}_{,\nu\kappa} - V^\kappa{}_{,\gamma\kappa} = 0 \;. \qquad (1)$$

2b) Følgende symmetrier og bevaringslover gjelder (merk at det ikke spørres i oppgaven etter eksplisitte formler, hverken for energi-impulstewnsoren eller andre størrelser):

- Symmetri under vilkårlige translajoner i tid og rom, som impliserer bevaring av energi og impuls. Mer spesifikt betyr det at den kanoniske energi-impulstensoren

$$\widehat{T}_{\lambda}{}^{\kappa} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial V^{\gamma}{}_{,\kappa}} V^{\gamma}{}_{,\lambda} - \delta^{\kappa}_{\lambda} \mathcal{L} = \eta_{\gamma\beta}\, \eta^{\kappa\nu}\, V^{\beta}{}_{,\nu}\, V^{\gamma}{}_{,\lambda} - V^{\kappa}{}_{,\gamma}\, V^{\gamma}{}_{,\lambda} - \delta^{\kappa}_{\lambda} \mathcal{L}$$

  er bevart, og det vil si at $\widehat{T}_{\lambda}{}^{\kappa}{}_{,\kappa} = 0$.
  Et ekvivalent uttrykk for bevaring av energi og impuls er at den symmetriske energi-impulstensoren $T^{\kappa\lambda}$ er bevart. ($T^{\kappa\lambda}$ kan finnes ved Belinfantes metode for symmetrisering, eller ved variasjon av metrikken $g_{\mu\nu}$ i Lagrange-tettheten definert under punkt 2c) nedenfor).

- Symmetri under vilkårlige Lorentz-transformasjoner, av formen

$$x^{\mu} \mapsto \widetilde{x}^{\mu} = \Lambda^{\mu}{}_{\nu}\, x^{\nu} \;, \qquad \text{der} \qquad \eta_{\kappa\lambda}\, \Lambda^{\kappa}{}_{\mu}\, \Lambda^{\lambda}{}_{\nu} = \eta_{\mu\nu} \;.$$

  Lorentz-transformasjonene inkluderer rotasjoner, rominversjon og tidsreversjon. Symmetri under kontinuerlige Lorentz-transformasjoner impliserer bevaring av impulsmomenttensoren (dreieimpulstensoren)

$$M^{\mu\nu\rho} = x^{\mu}\, T^{\nu\rho} - x^{\nu}\, T^{\mu\rho} \;,$$

  der $T^{\nu\rho}$ er den symmetriske energi-impulstensoren. Bevaring av $M^{\mu\nu\rho}$ vil si at $M^{\mu\nu\rho}{}_{,\rho} = 0$.

- Euler–Lagrange-ligningene (1) har i seg selv form av en bevaringslov. Det skyldes at $\partial\mathcal{L}/\partial V^{\gamma} = 0$. Eller sagt på en litt annen måte: det skyldes at en vilkårlig *global“gauge-transformasjon”* av formen

$$V^{\alpha} \mapsto \widetilde{V}^{\alpha} = V^{\alpha} + \Delta V^{\alpha} \;, \tag{2}$$

  med ΔV^{α} konstant i tid og rom, gir $\Delta\mathcal{L} = 0$, og følgelig er en symmetri. Noethers teorem brukt på denne globale symmetrien gir en bevaringslov som er identisk med Euler–Lagrange-ligningene.

- En fjerde symmetri er litt mindre opplagt. Vi kan definere, som vanlig, $V_{\alpha} = \eta_{\alpha\beta}\, V^{\beta}$, det gir feltligningen (1) på en litt annen form,

$$\eta^{\kappa\nu}\, \frac{\partial}{\partial x^{\kappa}}\, (V_{\gamma,\nu} - V_{\nu,\gamma}) = 0 \;. \tag{3}$$

  Når vi skriver ligningen på denne formen, er det opplagt at den er invariant under en transformasjon (en “gauge-transformasjon”) av formen

$$V_{\alpha} \mapsto \widetilde{V}_{\alpha} = V_{\alpha} + \chi_{,\alpha} \;,$$

  der χ er et vilkårlig skalarfelt, $\chi = \chi(x^0, x^1, x^2, x^3)$, og $\chi_{,\alpha} = \partial\chi/\partial x^{\alpha}$. En slik gauge-transformasjon gir at

$$V^{\alpha} \mapsto \widetilde{V}^{\alpha} = V^{\alpha} + \eta^{\alpha\beta}\, \chi_{,\beta} \;.$$

Innsetting i den opprinnelige Lagrange-tettheten $\mathcal{L}$ viser at $\mathcal{L}$ er invariant under transformasjonen $V^\alpha \mapsto \widetilde{V}^\alpha$, og det er bevis nr. to for at denne transformasjonen er en symmetri.
Merk at denne lokale gauge-symmetrien er en generalisering av den globale gauge-symmetrien (2), men at generaliseringen fra en global til en lokal symmetri ikke gir noen ny bevaringslov.

2c) En standard metode for å generalisere til en teori som er invariant ikke bare under translasjoner og Lorentz-transformasjoner, men under vilkårlige koordinattransformasjoner, er å erstatte den spesielle metrikken $\eta_{\mu\nu}$ med den generelle metrikken $g_{\mu\nu}$, og dessuten multiplisere Lagrange-tettheten med $\sqrt{|g|}$, der g er determinanten av $g_{\mu\nu}$. Dessuten må den partiellderiverte $V^\alpha{}_{,\mu}$ erstattes med den kovariante deriverte $V^\alpha{}_{;\mu} = V^\alpha{}_{,\mu} + \Gamma^\alpha_{\beta\mu}\, V^\alpha{}_{;\beta}$, der $\Gamma^\alpha_{\beta\mu}$ er konneksjonskoeffisientene, gitt av metrikken.
Det gir følgende Lagrange-tetthet for en teori som er generelt invariant (kovariant):

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2}\sqrt{|g|}\left(g_{\alpha\beta}\, g^{\mu\nu}\, V^\alpha{}_{;\mu}\, V^\beta{}_{;\nu} - V^\rho{}_{;\sigma}\, V^\sigma{}_{;\rho}\right) .$$

3a) Ligningen for et lyssignal er: $\mathrm{d}s^2 = c^2\mathrm{d}t^2 - a^2\,\mathrm{d}\sigma^2 = 0$, og den gir at

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{c\,\mathrm{d}t}{a} .$$

Integralet av denne ligningen er den formelen som skulle vises.

3b) Koordinatavstanden mellom to galakser er konstant, og det vil si at

$$\sigma(t_1, t_2) = \sigma(t_1 + \Delta t_1, t_2 + \Delta t_2) .$$

Når Δt_1 og Δt_2 er små, så er

$$\begin{aligned} 0 &= \sigma(t_1 + \Delta t_1, t_2 + \Delta t_2) - \sigma(t_1, t_2) = \left(\Delta t_1 \frac{\partial}{\partial t_1} + \Delta t_2 \frac{\partial}{\partial t_2}\right)\sigma(t_1, t_2) \\ &= -\Delta t_1 \frac{c}{a(t_1)} + \Delta t_2 \frac{c}{a(t_2)} . \end{aligned}$$

Nettopp den formelen som skulle vises. Vi har brukt integralregningens hovedsetning, som sier at

$$\frac{\partial}{\partial b}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(b) , \qquad \frac{\partial}{\partial a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -f(a) .$$

3c) Tiden det tar å sende ut en bølgelengde λ_1 av lyset, er $\Delta\tau_1 = \lambda_1/c$.
Tiden det tar å motta en bølgelengde λ_2 av lyset, er $\Delta\tau_2 = \lambda_2/c$.
Merk: τ er *egentid*, nemlig tiden i et referansesystem der lyskilden er i ro, i det første tilfellet, eller der mottageren av lyset er i ro, i det andre tilfellet. Her snakker vi om galakser som er i ro i forhold til det gitte koordinatsystemet, og da er egentiden τ den samme som koordinattiden t.
Innsetting av $\Delta t_1 = \lambda_1/c$ og $\Delta t_2 = \lambda_2/c$ i formelen fra punkt 3b) gir at

$$\frac{\lambda_2}{\lambda_1} = \frac{a(t_2)}{a(t_1)} .$$

Når universet utvider seg, er $a(t_2) > a(t_1)$ og følgelig $\lambda_2 > \lambda_1$, slik at vi observerer alle spektrallinjer rødforskjøvet.

3d) Hvis $a(t) = a_0 (t/t_0)^n$, og $n < 1$, så er

$$\begin{aligned}\sigma(t_1, t_2) &= \frac{c\, {t_0}^n}{a_0} \int_{t_1}^{t_2} \frac{\mathrm{d}t}{t^n} = \frac{c\, {t_0}^n}{(1-n) a_0} \left({t_2}^{1-n} - {t_1}^{1-n} \right) \\ &= \frac{c\, t_0}{(1-n) a_0} \left(\left(\frac{t_2}{t_0} \right)^{1-n} - \left(\frac{t_1}{t_0} \right)^{1-n} \right) .\end{aligned}$$

At $a(t_1) \to 0$, betyr at $t_1 \to 0$, og i denne grensen vil

$$\sigma(t_1, t_2) \to \sigma(0, t_2) = \frac{c\, t_0}{(1-n) a_0} \left(\frac{t_2}{t_0} \right)^{1-n} . \tag{4}$$

3e) Hvis $a(t) = a_0 (t/t_0)^n$, så er Hubble-parameteren

$$H(t) = \frac{\dot{a}(t)}{a(t)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \ln a(t) = \frac{n}{t} .$$

Spesielt er $H_0 = n/t_0$. Når H_0 er kjent, og $n = 2/3$, finner vi

$$t_0 = \frac{n}{H_0} = \frac{2}{3 \times 0,65\; 10^{-10}/\text{år}} = 1,025\; 10^{10}\ \text{år} .$$

Koordinatavstanden til de fjerneste galaksene vi kan observere, er $\sigma(0, t_0)$, og den nåværende avstanden dit, dvs. den fysiske avstanden målt i lysår, er

$$a_0\, \sigma(0, t_0) = \frac{c\, t_0}{(1-n)} = 3c\, t_0 = 3,075\; 10^{10}\ \text{lysår} .$$

Selv om alderen på universet er bare 10 milliarder år (i følge den oppgitte verdien av H_0), kan vi altså teoretisk se galakser som nå er opptil 30 milliarder lysår fra oss. Til dette noe merkelige resultatet kan et par kommentarer kan være på sin plass.
For det første var avstanden til de galaksene som nå er 30 milliarder lysår fra oss, mye mindre enn 10 milliarder lysår dengang lyset ble sendt ut. Det som er merkelig, fra dette synspunktet, er derfor ikke at lyset derfra når oss i løpet av bare 10 milliarder år, men heller at det må bruke hele 10 milliarder år på veien hit.
For det andre så har altså disse galaksene fjernet seg fra oss hele 30 milliarder lysår i løpet av bare 10 milliarder år, slik at de har holdt en gjennomsnittshastighet på tre ganger lyshastigheten. Andre galakser, som er enda lenger borte, fjerner seg med enda større hastighet. Slike fenomener ville ikke kunne forekomme i et flatt tidrom, men som dette eksemplet viser, er de fullt mulige i et krumt tidrom. Det oppstår ingen konflikt med prinsippet om at ingen ting kan bevege seg raskere enn lyset i forhold til en annen ting. Det prinsippet gjelder nemlig når begge tingene befinner seg på samme sted, og det forbyr ikke *uten videre* at to galakser som er flere milliarder lysår fra hverandre, i et krumt tidrom, kan fjerne seg fra hverandre med overlyshastighet.

3f) Ligning (4), med $n < 1$, gir at $\sigma(t_1, t_2) \to 0$ når både $t_1 \to 0$ og $t_2 \to 0$. Ikke noe fysisk signal kan bre seg ut raskere enn lyset, så vidt vi vet! Med andre ord: to hvilke som helst områder av universet, med en endelig koordinatavstand imellom, hadde ingen mulighet til å vekselvirke før etter at universet allerede hadde eksistert en endelig tid. I denne modellen er det derfor problematisk å forklare hvordan det henger sammen at utvidelsen av universet startet samtidig overalt. Dette er mye verre å forklare enn det ville være dersom hundre hundremeterløpere, en i Trondheim, en i Kirkenes, en i Moskva, en i Tokyo, osv., alle startet å løpe i samme tiendels sekund, uten at de hørte et felles startskudd.

3g) Hvis $a(t) = a_0\, \mathrm{e}^{H\,(t-t_0)}$, og $H = H_0 =$ konstant, så er

$$\sigma(t_1, t_2) = \frac{c}{a_0} \int_{t_1}^{t_2} \mathrm{e}^{-H\,(t-t_0)}\, \mathrm{d}t = \frac{c}{H a_0} \left(\mathrm{e}^{-H\,(t_1-t_0)} - \mathrm{e}^{-H\,(t_2-t_0)} \right) .$$

Grensen $a(t_1) \to 0$ består i at $t_1 \to -\infty$. I denne grensen vil $\sigma(t_1, t_2) \to \infty$. Det betyr at et område av universet har tid nok til å vekselvirke med hele resten av universet, før et hvilket som helst tidspunkt. Dermed eksisterer ikke det samme kausalitetsproblemet som eksisterer i et univers som er materiedominert eller strålingsdominert. Og derfor er det en mulig løsning på kausalitetsproblemet i den kosmologiske standardmodellen å postulere at universet gikk gjennom en inflasjonsperiode, en gang før syntesen av de lette grunnstoffene (helium, deuterium og litium) fant sted.