Eksamen i fag nummer 74 355 Kjernefysikk, lørdag 27. mai 1995

Løsninger

1. a) Det differensielle elastiske spredningstverrsnittet er

$$\frac{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{el}}}{\mathrm{d}\Omega} = |f(\theta)|^2 \; .$$

Det totale elastiske spredningstverrsnittet er

$$\sigma_{\mathrm{el}} = \int \mathrm{d}\Omega \, \frac{\mathrm{d}\sigma_{\mathrm{el}}}{\mathrm{d}\Omega} = \text{den oppgitte formelen} \; ,$$

idet Legendre-polynomene er ortogonale:

$$\int \mathrm{d}\Omega \, P_\ell(\cos\theta) \, P_{\ell'}(\cos\theta) = \frac{4\pi}{2\ell+1} \, \delta_{\ell\ell'} \; .$$

Pr. definisjon er $\eta_\ell \, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\delta_\ell}$ lik amplityden av den utgående elastisk spredte kulebølgen med dreieimpuls ℓ, dividert med amplityden av den innkommende kulebølgen med dreieimpuls ℓ. En definerer innkommende og utgående kulebølger (også kalt partialbølger) på en slik måte at $\eta_\ell \, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\delta_\ell} = 1$ når det ikke er noen spredning av denne partialbølgen, hverken elastisk eller uelastisk. Sannsynligheten for absorpsjon av den innkommende kulebølgen er $1 - {\eta_\ell}^2$, og derfra kan en utlede den oppgitte formelen for det uelastiske spredningstverrsnittet
At $\eta_\ell = 1$ betyr derfor at partialbølge nr. ℓ spres rent elastisk.
At $\eta_\ell = 0$ betyr at spredningen er fullstendig uelastisk, i den forstand at den innkommende partialbølgen blir fullstendig absorbert.
Merk at en fullstendig absorbert partialbølge gir et bidrag til det elastiske spredningstverrsnittet, i følge formelen! Dette fenomenet kalles diffraksjon.

b) Ved lav energi spres bare den laveste partialbølgen, med $\ell = 0$.
Det uelastiske tverrsnittet er da

$$\sigma_{\mathrm{uel}} = \frac{\pi}{k^2} \left(1 - {\eta_0}^2\right) \leq \frac{\pi}{k^2} \; .$$

Det er maksimalt når elastisiteten $\eta_0 = 0$.
Ved temperaturen $T = 600$ K er den gjennomsnittlige kinetiske energien til termiske nøytroner

$$E = \frac{3}{2} k_{\mathrm{B}} T = 1,5 \times 8,62 \times 10^{-5} \; (\mathrm{eV}/K) \; 600 \; K = 0,0776 \; \mathrm{eV} \; .$$

Bølgetallet k er gitt ved at

$$E = \frac{\hbar^2 k^2}{2m_{\mathrm{n}}} \; .$$

Strengt tatt burde vi erstatte nøytronmassen m_{n} med den reduserte massen for et nøytron og en atomkjerne, men denne lille korreksjonen ser vi bort fra.
Vi får da at

$$k = \frac{\sqrt{2m_{\mathrm{n}}E}}{\hbar} = \frac{\sqrt{2 \times 939,6 \; (\mathrm{MeV}/c^2) \times 0,0776 \; \mathrm{eV}}}{197 \; (\mathrm{MeV}/c) \times 10^{-15} \; \mathrm{m}} = 6,13 \times 10^{10}/\mathrm{m} \; .$$

I følge ulikheten ovenfor må da

$$\sigma_{\text{uel}} \leq \frac{\pi}{k^2} = 8,36 \times 10^{-22}\ \text{m}^2 = 8,36 \times 10^6\ \text{b}\ .$$

Det målte absorpsjonstverrsnittet for ^{135}Xe, som er $2,7 \times 10^6$ b, er 32,2% av det maksimale uelastiske tverrsnittet.

c) Siden det totale uelastiske tverrsnittet er minst så stort som absorpsjonstverrsnittet, gir det ulikheten $1 - {\eta_0}^2 \geq 0,322$, eller

$$\eta_0 \leq \sqrt{0,678} = 0,82\ .$$

Det elastiske tverrsnittet, i likhet med det uelastiske, kommer helt og holdent fra partialbølgen $\ell = 0$, dvs. at

$$\sigma_{\text{el}} = \frac{\pi}{k^2} \left| \eta_0\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\delta_0} - 1 \right|^2\ .$$

Vinkelfordelingen er isotrop, idet $P_0(\cos\theta) = 1$.
Vi får nedre og øvre grense for σ_{el} ved å sette henholdsvis $\eta_0\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\delta_0} = 0,82$ og $\eta_0\, \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\delta_0} = -0,82$:

$$\sigma_{\text{el}} \geq \frac{\pi}{k^2}\, 0,18^2 = 2,6 \times 10^5\ \text{b}\ , \qquad \sigma_{\text{el}} \leq \frac{\pi}{k^2}\, 1,82^2 = 2,8 \times 10^7\ \text{b}\ .$$

d) En fissil atomkjerne fisjonerer ved absorpsjon av ett termisk nøytron.
En fertil atomkjerne fisjonerer ikke ved absorpsjon av ett termisk nøytron, men den kjernen som da oppstår, er fissil.
Fissile isotoper er stort sett de som har et odde antall nøytroner, mens de fertile har et like antall.
Dette forklares med paringseffekten, at kjerner som har et odde antall nøytroner er mindre stabile enn de som har et like antall.

e) Et forsinket nøytron emitteres fra en kjerne som har et stort overskudd av nøytroner, og som oppstår ved β-desintegrasjon av en annen kjerne som er et fisjonsprodukt. Forsinkelsen skyldes altså at den kjernen som β-desintegrerer, har en levetid på sekunder eller minutter.
De forsinkede nøytronene utgjør bare en liten brøkdel av det totale antallet, men de gjør det mulig å regulere en kjernereaktor. Uten tidsforsinkelsen ville tidskonstanten for økning av antallet frie nøytroner bli for liten, slik at det ikke ble tid til å dempe kjedereaksjonen (f.eks. ved hjelp av kontrollstaver).
Reaktorgifter er isotoper med ekstra stort apsorpsjonstverrsnitt for termiske nøytroner. Ett eksempel, som er nevnt ovenfor, er ^{135}Xe.

2. a) Massetallet A og protontallet (atomnummeret) Z forandres slik ved radioaktive prosesser:
$(A, Z) \to (A-4, Z-2)$ ved α-desintegrasjon,
$(A, Z) \to (A, Z \pm 1)$ ved β-desintegrasjon,
$(A, Z) \to (A, Z)$ ved γ-desintegrasjon.
Fordi A bare kan forandres i sprang på fire, mens Z kan forandres vilkårlig, blir det nøyaktig fire adskilte serier (n er heltallig):
$A = 4n$ (thorium-serien), $A = 4n + 1$ (neptunium-serien),
$A = 4n + 2$ (uran-serien) og $A = 4n + 3$ (actinium-serien).

b) Sammenhengen mellom halveringstid $\tau_{1/2}$ og midlere levetid τ er at $\tau_{1/2} = \tau \ln 2 = 0,693\,\tau$. Midlere levetid er for de tre uran-isotopene:

$$\begin{aligned}
\tau({}^{238}\mathrm{U}) &= 6,45 \times 10^9 \text{ år} = 2,04 \times 10^{17} \text{ s} , \\
\tau({}^{235}\mathrm{U}) &= 1,03 \times 10^9 \text{ år} = 3,25 \times 10^{16} \text{ s} , \\
\tau({}^{234}\mathrm{U}) &= 3,53 \times 10^5 \text{ år} = 1,12 \times 10^{13} \text{ s} .
\end{aligned}$$

Ett kg uran inneholder:

$$\begin{array}{rrll}
{}^{238}\mathrm{U} : & 992,75 \text{ g} , & \text{eller} & (992,75/238,051) \text{ mol} = 4,17033 \text{ mol} , \\
{}^{235}\mathrm{U} : & 7,20 \text{ g} , & \text{eller} & (7,20/235,044) \text{ mol} = 0,03063 \text{ mol} , \\
{}^{234}\mathrm{U} : & 0,057 \text{ g} , & \text{eller} & (0,057/234,041) \text{ mol} = 0,000244 \text{ mol} .
\end{array}$$

Aktivitet a er da (her er N_A Avogadros konstant):

$$\begin{aligned}
a({}^{238}\mathrm{U}) &= (N_A/\tau({}^{238}\mathrm{U}))\; 4,17 \text{ mol} = 1,23 \times 10^7 \text{ Bq} , \\
a({}^{235}\mathrm{U}) &= (N_A/\tau({}^{235}\mathrm{U}))\; 0,0306 \text{ mol} = 5,68 \times 10^5 \text{ Bq} , \\
a({}^{234}\mathrm{U}) &= (N_A/\tau({}^{234}\mathrm{U}))\; 0,000244 \text{ mol} = 1,31 \times 10^7 \text{ Bq} .
\end{aligned}$$

Kommentar: Aktiviteten er 8% større av ^{234}U enn av ^{238}U, i følge denne beregningen. At de to aktivitetene er (nesten) like, kan forklares ved at (nesten) alt ^{234}U som finnes naturlig, oppstår ved desintegrasjon av ^{238}U, og at hver ^{238}U-kjerne gir opphav til en ^{234}U-kjerne. Det som fantes av ^{234}U opprinnelig, da jorda oppsto for nærmere 5 milliarder år siden, er borte nå, fordi levetiden til ^{234}U er relativt kort. Prosessen

$${}^{238}_{92}\mathrm{U} \rightarrow {}^{234}_{90}\mathrm{Th} \rightarrow {}^{234}_{91}\mathrm{Pa} \rightarrow {}^{234}_{92}\mathrm{U} \rightarrow \ldots$$

har nådd likevekt, slik at i gjennomsnitt oppstår det en kjerne ^{234}U for hver kjerne ^{234}U som desintegrerer.
^{235}U tilhører en annen radioaktiv serie enn ^{234}U og ^{238}U, derfor er aktiviteten av ^{235}U en uavhengig størrelse. Den er liten i forhold til aktiviteten av ^{238}U, fordi levetiden er kortere, slik at mesteparten av det ^{235}U som fantes opprinnelig, allerede har desintegrert.

c) Bare α-desintegrasjon kan forandre massetallet A. For å redusere A fra 238 til 206 trengs det 8 α-desintegrasjoner. Men da reduseres atomnummeret Z med 16, som er 6 for mye. Altså trengs det 6 β-desintegrasjoner som hver øker Z med 1.
Alt i alt $8 + 6 = 14$ α- og β-desintegrasjoner.
Den totale frigjorte energien, Q-verdien, finner vi ganske enkelt ved å ta differensen av atommassene (elektronregnskapet balanserer, fordi de 6 β-desintegrasjonene produserer 6 elektroner):

$$Q = \Big(M_A({}^{238}\mathrm{U}) - M_A({}^{206}\mathrm{Pb}) - 8 M_A({}^{4}\mathrm{He}) \Big)\, c^2 = 0,055521 \text{ u}\, c^2 = 51,7175 \text{ MeV} .$$

d) Aktivitet i ett kg havvann:

$$a(\,^{238}\mathrm{U}) = 3 \times 10^{-9} \times 1,23 \times 10^{7}\ \mathrm{Bq} = 0,037\ \mathrm{Bq}\ .$$

Dette bidraget må multipliseres med 14 hvis vi vil regne med hele ^{238}U-serien. Vi gjør da visse forutsetninger: at hele desintegrasjonsserien har nådd en likevektstilstand, at ingen stoffer forsvinner ut av systemet (fordi de er gasser, eller er uløselige i vann), og vi ser bort fra eventuell γ-aktivitet, som ellers kommer i tillegg. Altså:

$$a(\,^{238}\mathrm{U\text{-}serien}) = 14 \times 0,037\ \mathrm{Bq} = 0,52\ \mathrm{Bq}\ .$$

Ett kg havvann inneholder $0,00012 \times 0,38$ g $= 4,56 \times 10^{-5}$ g av ^{40}K, som er $(4,56 \times 10^{-5}/40)$ mol $= 1,14 \times 10^{-6}$ mol. Midlere levetid:

$$\tau(\,^{40}\mathrm{K}) = \frac{\tau_{1/2}(\,^{40}\mathrm{K})}{\ln 2} = 1,85 \times 10^{9}\ \text{år} = 5,83 \times 10^{16}\ \mathrm{s}\ .$$

Aktivitet:

$$a(\,^{40}\mathrm{K}) = (N_A/\tau(\,^{40}\mathrm{K}))\ 1,14 \times 10^{-6}\ \mathrm{mol} = 12\ \mathrm{Bq}\ .$$

3. a) Spilleregler (mer eller mindre generelt gyldige):
(i) Like-like-kjerner har spinn og paritet $I^{\pi} = 0^{+}$.
(ii) Like-odde-kjerner har spinn og paritet som for det odde protonet/nøytronet.
(iii) Odde-odde-kjerner har spinn og paritet bestemt av det odde protonet og det odde nøytronet tilsammen. Koplingen av dreiempulsene er slik at egenspinnene til protonet og nøytronet er parallelle.
– $^{2}_{1}$H, deuteronet: 1^{+} (regel (iii), korrekt).
– $^{4}_{2}$He: 0^{+} (regel (i), korrekt).
– $^{6}_{3}$Li: 3^{+} (regel (iii), korrekt er 1^{+}).
– $^{13}_{6}$C: $(1/2)^{-}$ (regel (ii), korrekt).
– $^{14}_{6}$C: 0^{+} (regel (i), korrekt).
– $^{38}_{17}$Cl: 2^{-} (regel (iii), korrekt).
– $^{71}_{33}$As: $(5/2)^{-}$ (regel (ii), korrekt).
– $^{72}_{33}$As: 3^{+} (regel (iii), korrekt er 2^{-}, kan forklares f.eks. med at det odde nøytronet er i tilstanden $1\mathrm{g}_{9/2}$ i stedet for i $2\mathrm{p}_{1/2}$).
– $^{73}_{33}$As: $(5/2)^{-}$, som $^{72}_{33}$As (regel (ii), korrekt er $(3/2)^{-}$, kan (kanskje?) forklares med at det odde protonet er i tilstanden $2\mathrm{p}_{3/2}$ i stedet for i $1\mathrm{f}_{5/2}$).