Eksamen i fag nummer 74 355 Kjernefysikk, lørdag 10. mai 1997

Løsninger

1. a) Skallmodellen fungerer best for kjerner der protonene og nøytronene hver for seg fyller opp nøyaktig et helt antall energinivå for en-partikkelsystemet. Eller for kjerner i nærheten av disse.
Væskedråpemodellen er "komplementær", og fungerer best for kjerner som har halvfulle en-partikkelnivå.
Den typen vibrasjoner som er enklest, og som derfor har lavest energi, er kvadrupolvibrasjoner. Ett kvadrupolfonon gir et eksitert nivå med spinn og paritet 2^+, og med en typisk energi rundt 1 MeV. To kvadrupolfononer gir tre nivå med spinn og paritet 0^+, 2^+ og 4^+, og med typiske energier rundt 2 MeV.
Kollektiv rotasjon av en (deformert) 0^+-kjerne gir energier

$$E_\ell = \frac{\ell(\ell+1)\hbar^2}{2\mathcal{I}} \,,$$

der $\ell = 0, 2, 4, 6, \ldots$ er dreieimpulsen og $\mathcal{I}$ er treghetsmomentet.
Spinn og paritet for nivåene er ℓ^+.
Forholdet mellom energiene til nivåene 4^+ og 2^+ er da ca. 2 for vibrasjon og $20/6 = 3,33\ldots$ for rotasjon.

b) Regler som gjelder mer eller mindre generelt:
(i) Like-like-kjerner har spinn og paritet $I^\pi = 0^+$.
(ii) Like-odde-kjerner har spinn og paritet som for det odde protonet/nøytronet.
(iii) Odde-odde-kjerner har spinn og paritet bestemt av det odde protonet og det odde nøytronet tilsammen. Koplingen av dreieimpulsene er slik at egenspinnene til protonet og nøytronet er parallelle.
– ${}^3_1$H (tritium): $(1/2)^+$ (regel (ii), korrekt).
– ${}^3_2$He: $(1/2)^+$ (regel (ii), korrekt).
– ${}^9_4$Be: $(3/2)^-$ (regel (ii), korrekt).
– ${}^{13}_6$C: $(1/2)^-$ (regel (ii), korrekt).
– ${}^{14}_6$C: 0^+ (regel (i), korrekt).
– ${}^{209}_{82}$Pb: $(9/2)^+$ (regel (ii), korrekt).
– ${}^{209}_{83}$Bi: $(9/2)^-$ (regel (ii), korrekt).
– ${}^{210}_{83}$Bi: 0^- (regel (iii), korrekt er 1^-).

c) La I_1 og I_2 være kjernespinnet henholdsvis før og etter γ-overgangen.
Utvalgsregler for elektrisk multipolstråling EL og magnetisk multipolstråling ML:
Forandringen i kjernespinnet er $|I_2 - I_1| = 0, 1, \ldots, L$. Dessuten må $L \le I_1 + I_2$.
Altså: $|I_1 - I_2| \le L \le I_1 + I_2$.
Forandringen i paritet er $(-1)^L$ for EL og $(-1)^{L+1}$ for ML.
De mulige overgangene blir da:
– $(3/2)^+ \to (3/2)^-$: E1,M2 (mindre sannsynlig: E3).
– $(3/2)^+ \to (5/2)^-$: E1,M2 (E3,M4).
– $(3/2)^+ \to (7/2)^-$: M2,E3 (M4,E5).
– $(3/2)^- \to (5/2)^-$: M1,E2 (M3,E4).
– $(3/2)^- \to (7/2)^-$: E2,M3 (E4,M5).
– $(5/2)^- \to (7/2)^-$: M1,E2 (M3,E4,M5,E6).

d) Antallet gjenværende radioaktive kjerner etter en tid t er

$$N(t) = N_0\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\ ,$$

der N_0 og λ er konstanter. Halveringstiden er gitt ved at $\mathrm{e}^{-\lambda t_{1/2}} = 1/2$, altså

$$t_{1/2} = \frac{\ln 2}{\lambda}\ .$$

Antallet kjerner som desintegrerer i et tidsintervall fra t til $t + \mathrm{d}t$ er

$$\mathrm{d}n = -\mathrm{d}N = N_0 \lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t\ .$$

Etter uendelig lang tid er alle de opprinnelige N_0 kjernene desintegrert.
Den midlere levetiden er

$$\begin{aligned}\tau &= \frac{1}{N_0}\int_0^{N_0} t\,\mathrm{d}n = \frac{1}{N_0}\int_0^{\infty} t\left(N_0\lambda\,\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t\right)\\ &= -\lambda\,\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\lambda}\left(\int_0^{\infty}\mathrm{e}^{-\lambda t}\,\mathrm{d}t\right) = \frac{1}{\lambda} = \frac{t_{1/2}}{\ln 2}\ .\end{aligned}$$

Den naturlige linjbredden er da

$$\Gamma = \frac{\hbar}{\tau} = \frac{\hbar \ln 2}{t_{1/2}} = \frac{197\,\mathrm{MeV\ fm}\ \ln 2}{c\,10^{-10}\,\mathrm{s}} = \frac{197\,\mathrm{MeV}\,10^{-15}\,\mathrm{m}\,0,693}{3,00\times 10^{-2}\,\mathrm{m}} = 4,55\times 10^{-6}\,\mathrm{eV}\ .$$

Massen M til kjernen er (tilnærmet) lik 100 u. Fotonet har energi $E_\gamma \approx \Delta E$ og impuls $p = E_\gamma/c$. Rekylimpulsen til kjernen er like stor og motsatt rettet.
Rekylenergien er altså

$$E_r = \frac{p^2}{2M} = \frac{{E_\gamma}^2}{2Mc^2} \approx \frac{(\Delta E)^2}{2Mc^2} = \frac{(0,1\,\mathrm{MeV})^2}{200\times 931\,\mathrm{MeV}} = 0,054\,\mathrm{eV}\ .$$

Som er ca. 10 000 ganger større enn den naturlige linjebredden, men likevel mye mindre enn E_γ. Vi får altså bekreftet antagelsen om at $E_\gamma = \Delta E - E_r \approx \Delta E$.

e) Mössbauer-effekten går ut på at rekylenergien til en atomkjerne som sender ut et foton, typisk er mindre enn bindingsenergien for atomet i et krystallgitter. Derfor er det mulig at rekylen tas opp av hele krystallen. Noe av rekylenergien kan tas opp av gitteret i form av gittervibrasjoner (fononer), men det er også mulig at det ikke eksiteres fononer. Kjernemassen M i formelen for rekylenergien erstattes dermed av massen til en hel krystall, som typisk kan være 10^{23} ganger kjernemassen. Det gjør rekylenergien forsvinnende liten, sammenlignet f.eks. med den naturlige linjebredden.

f) De mulige radioaktive prosessene er:
– α-desintegrasjon: $(A, Z) \to (A-4, Z-2)$,
– β^--desintegrasjon: $(A, Z) \to (A, Z+1)$,
– elektroninnfanging (ϵ): $(A, Z) \to (A, Z-1)$.
A er massetallet og Z protontallet (atomnummeret).
Det som avgjør om en prosess er mulig eller ikke, er om Q-verdien ("overskuddsenergien") er positiv eller negativ. β^+-desintegrasjon vil ikke forekomme i praksis,

fordi den alltid har mindre Q-verdi enn elektroninnfanging.
Q-verdien for hver av de tre prosessene finner vi ganske enkelt ved å ta differensen mellom atommasser m_A.
Ta først iridium 190:

$$\begin{aligned}
(\alpha): \quad Q &= \Big(m_A({}^{190}_{77}\mathrm{Ir}) - m_A({}^{186}_{75}\mathrm{Re}) - m_A({}^{4}_{2}\mathrm{He})\Big)\, c^2 \\
&\qquad = 0,002993\,\mathrm{u}\, c^2 = 2,788\,\mathrm{MeV}. \\
(\beta^-): \quad Q &= \Big(m_A({}^{190}_{77}\mathrm{Ir}) - m_A({}^{190}_{78}\mathrm{Pt})\Big)\, c^2 = 0,000663\,\mathrm{u}\, c^2 = 0,618\,\mathrm{MeV}. \\
(\epsilon): \quad Q &= \Big(m_A({}^{190}_{77}\mathrm{Ir}) - m_A({}^{190}_{76}\mathrm{Os})\Big)\, c^2 = 0,002144\,\mathrm{u}\, c^2 = 1,997\,\mathrm{MeV}.
\end{aligned}$$

Alle tre prosessene er mulige.
α-desintegrasjon er lite sannsynlig, fordi Q-verdien er liten, sammenlignet med høyden av en potensialbarriere som skyldes både Coulomb-potensialet og sentrifugalpotensialet med relativ dreieimpuls $\ell = 3, 5, 7, \ldots$. (For en overgang $4^+ \to 1^-$ må $\ell \geq 3$, og ℓ må være odde fordi paritetsforandringen til atomkjernen er $(-1)^\ell$).
Størst Q-verdi av de to andre har ϵ-overgangen. Den er tredje-forbudt hvis den går til grunntilstanden i ${}^{190}_{76}\mathrm{Os}$, men sannsynligvis finner den et "mer tillatt" eksitert nivå innenfor de $1,997\,\mathrm{MeV}$.
Fasit: levetiden for ϵ-overgangen er 11,8 dager.
Ta så iridium 191:

$$\begin{aligned}
(\alpha): \quad Q &= \Big(m_A({}^{191}_{77}\mathrm{Ir}) - m_A({}^{187}_{75}\mathrm{Re}) - m_A({}^{4}_{2}\mathrm{He})\Big)\, c^2 \\
&\qquad = 0,002237\,\mathrm{u}\, c^2 = 2,084\,\mathrm{MeV}. \\
(\beta^-): \quad Q &= \Big(m_A({}^{191}_{77}\mathrm{Ir}) - m_A({}^{191}_{78}\mathrm{Pt})\Big)\, c^2 = -0,001081\,\mathrm{u}\, c^2 = -1,007\,\mathrm{MeV}. \\
(\epsilon): \quad Q &= \Big(m_A({}^{191}_{77}\mathrm{Ir}) - m_A({}^{191}_{76}\mathrm{Os})\Big)\, c^2 = -0,000336\,\mathrm{u}\, c^2 = -0,3130\,\mathrm{MeV}.
\end{aligned}$$

Den eneste mulige er α, som igjen er undertrykt fordi Q-verdien er liten sammenlignet med potensialbarrieren som skyldes Coulomb-potensialet og sentrifugalpotensialet med $\ell = 2, 4, 6, \ldots$.
Fasit: Iridium 191 er stabil i følge alle tabeller, det må bety at levetiden er så lang at desintegrasjonen ikke observeres.
Så til iridium 192:

$$\begin{aligned}
(\alpha): \quad Q &= \Big(m_A({}^{192}_{77}\mathrm{Ir}) - m_A({}^{188}_{75}\mathrm{Re}) - m_A({}^{4}_{2}\mathrm{He})\Big)\, c^2 \\
&\qquad = 0,001871\,\mathrm{u}\, c^2 = 1,743\,\mathrm{MeV}. \\
(\beta^-): \quad Q &= \Big(m_A({}^{192}_{77}\mathrm{Ir}) - m_A({}^{192}_{78}\mathrm{Pt})\Big)\, c^2 = 0,001561\,\mathrm{u}\, c^2 = 1,454\,\mathrm{MeV}. \\
(\epsilon): \quad Q &= \Big(m_A({}^{192}_{77}\mathrm{Ir}) - m_A({}^{192}_{76}\mathrm{Os})\Big)\, c^2 = 0,001113\,\mathrm{u}\, c^2 = 1,037\,\mathrm{MeV}.
\end{aligned}$$

Alle tre prosessene er igjen mulige.
α er undertrykt fordi Q-verdien er liten og $\ell = 4, 6, 8, \ldots$.
Størst Q-verdi forøvrig har β^--overgangen. Den er tredje-forbudt hvis den går til grunntilstanden i ${}^{190}_{76}\mathrm{Os}$, men finner antagelig et eksitert nivå å desintegrere til innenfor de $1,454\,\mathrm{MeV}$.

Fasit: levetiden for β^--overgangen er 74,2 dager.
Og endelig iridium 193:

$$
\begin{aligned}
(\alpha): \quad Q &= \Big(m_A(\,^{193}_{77}\mathrm{Ir}) - m_A(\,^{189}_{75}\mathrm{Re}) - m_A(\,^{4}_{2}\mathrm{He})\Big)\, c^2 \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad = 0,001095\,\mathrm{u}\, c^2 = 1,020\,\mathrm{MeV}. \\
(\beta^-): \quad Q &= \Big(m_A(\,^{193}_{77}\mathrm{Ir}) - m_A(\,^{193}_{78}\mathrm{Pt})\Big)\, c^2 = -0,000060\,\mathrm{u}\, c^2 = -0,056\,\mathrm{MeV}. \\
(\epsilon): \quad Q &= \Big(m_A(\,^{193}_{77}\mathrm{Ir}) - m_A(\,^{193}_{76}\mathrm{Os})\Big)\, c^2 = -0,001221\,\mathrm{u}\, c^2 = -1,137\,\mathrm{MeV}.
\end{aligned}
$$

Den eneste mulige prosessen er α, som igjen er undertrykt fordi Q-verdien er svært liten (for en α-overgang).
Fasit: Liksom iridium 191 er iridium 193 stabil i følge alle tabeller.

g) Atomkjerner lettere enn jern bygges opp for det meste ved fusjon av lette kjerner. For de kjernene som er tyngre enn jern, er Coulomb-barrieren i praksis ugjennomtrengelig, og de må derfor produseres ved innfanging av nøytroner.
Siden atomkjernene i nærheten av jern er de mest stabile (de har størst bindingsenergi pr. nukleon), så frigjøres det energi når lettere kjerner smelter sammen, mens det koster energi å produsere de tyngre kjernene.
Det første og mest langvarige stadiet som de fleste stjernene går gjennom, er fusjon av hydrogen (protoner) til helium.
Reaksjoner i proton-proton-syklusen:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{p} + \mathrm{p} &\to \mathrm{d} + \mathrm{e}^+ + \nu\,, \\
\mathrm{p} + \mathrm{d} &\to {}^3\mathrm{He} + \gamma\,, \\
{}^3\mathrm{He} + {}^3\mathrm{He} &\to {}^4\mathrm{He} + \mathrm{p} + \mathrm{p}\,.
\end{aligned}
$$

Det neste stadiet er “forbrenning” av helium til ^{12}C, via den ustabile kjernen ^{8}Be. Fra ^{12}C kan ^{16}O, ^{20}Ne, osv., bygges opp ved absorpsjon av ^{4}He.
Enda et stadium er forbrenning av ^{12}C, f.eks. ved reaksjonene

$$
{}^{12}\mathrm{C} + {}^{12}\mathrm{C} \to {}^{20}\mathrm{Ne} + {}^4\mathrm{He} \quad \text{eller} \quad {}^{23}\mathrm{Na} + \mathrm{p}\,.
$$

Produksjon av tyngre kjerner ved nøytronabsorpsjon ser ut til å ha skjedd ved to vesensforskjellige prosesser.
For det første en “sakte” prosess (“s-prosess”), der nøytronfluksen er liten nok til at en nyprodusert kjerne har tid til å β-desintegrere før den absorberer et nytt nøytron. Dette er den normale situasjonen i en stjerne, som kan vare i mange millioner år inntil det oppstår en tilnærmet stasjonær tilstand med likevekt mellom produksjon og forbruk av de fleste isotopene.
Og for det andre en “rask” prosess (“r-prosess”) der nøytronfluksen er stor og en nyprodusert kjerne derfor får svært kort tid til å β-desintegrere. Denne prosessen foregår muligens i supernovaeksplosjoner.
Beviset for at begge mekanismene må ha vært virksomme, er at det finnes visse isotoper i naturen som er rene “s-isotoper”, og andre som er rene “r-isotoper”, dvs. at de bare kan ha blitt produsert ved den ene av de to mekanismene.

2. a) Eksempel på en utvidet tabell:

	Sterk vekselvirkning	Elektromagnetisk vekselvirkning	Svak vekselvirkning
Energi	×	×	×
Impuls	×	×	×
Dreieimpuls	×	×	×
Paritet (P)	×	×	
Tidsreversjon (T)	×	×	
Elektrisk ladning	×	×	×
Baryontall	×	×	×
Leptontall	×	×	×
Isospinn	×		
Særtall	×	×	
Ladningskonjugasjon (C)	×	×	
CP	×	×	
CPT	×	×	×

b) Det gjelder at $\Delta T = 0$ for sterke vekselvirkninger, mens $\Delta T = 0$ eller $\Delta T = 1$ for elektromagnetiske og svake vekselvirkninger.
Forklaringen er, grovt sett, at både elektromagnetiske og svake overganger i første tilnærming involverer bare ett nukleon i en kjerne, med all de andre som "tilskuere". Ett nukleon har isospinn 1/2, derfor kan ikke det totale isospinnet forandres med mer enn maksimalt en enhet.

c) Utvalgsregelen $\Delta T = 1/2$ i desintegrasjonen av Λ betyr at slutt-tilstanden må ha isospinn 1/2. Vi må altså addere isospinn $T^\pi = 1$ (for π-mesonet) og $T^N = 1/2$ (for nukleonet) til totalt isospinn 1/2.
Isospinnkomponenten T_3 er

$$-1 + \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} \qquad \text{og} \qquad 0 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2}$$

for henholdsvis $\pi^- + \mathrm{p}$ og $\pi^0 + \mathrm{n}$.
Tabellen over Clebsch–Gordan-koeffisienter gir at

$$\left| T = \frac{1}{2}, T_3 = -\frac{1}{2} \right\rangle = \sqrt{\frac{1}{3}} \left| T_3^\pi = 0, T_3^N = -\frac{1}{2} \right\rangle - \sqrt{\frac{2}{3}} \left| T_3^\pi = -1, T_3^N = \frac{1}{2} \right\rangle .$$

Forgreningsforholdet er kvadratet av Clebsch–Gordan-koeffisientene, altså 1/3 for $\pi^0 + \mathrm{n}$ og 2/3 for $\pi^- + \mathrm{p}$.
Fasit: $(35,8 \pm 0,5)\%$ for $\pi^0 + \mathrm{n}$ og $(63,9 \pm 0,5)\%$ for $\pi^- + \mathrm{p}$. Avviket fra forholdet 1/2 kan delvis forklares ved at Q-verdiene er litt forskjellige, idet π^0 er lettere enn π^-, mer enn p er lettere enn n.

Siden K-mesonet har isospinn 1/2, gir utvalgsregelen $\Delta T = 1/2$ at enten $T = 0$ eller $T = 1$ i slutt-tilstanden. Bølgefunksjonen for en tilstand med to π-mesoner, med kvantisert totalt isospinn, kan skrives som et produkt

$$\psi(\text{total}) = \psi(\text{isospinn})\,\psi(\text{rom}) \ .$$

Den må være symmetrisk under ombytte av de to partiklene, siden π-mesoner er bosoner (de har spinn 0).
Siden K-mesonet har spinn 0, må dreieimpulsen i massesentersystemet til de to π-mesonene være $\ell = 0$. Det betyr at rombølgefunksjonen har symmetri $(-1)^\ell = 1$, og følgelig må isospinnbølgefunksjonen også være symmetrisk.
To isospinn $T^\pi = 1$ adderes til totalt isospinn T lik enten 2, 1 eller 0.
Av disse er $T = 2$ og $T = 0$ symmetriske, mens $T = 1$ er antisymmetrisk (Clebsch–Gordan-koeffisientene for kopling av dreieimpulser j_1 og j_2 til total dreieimpuls j har en generell symmetrifaktor $(-1)^{j-j_1-j_2}$ — se tabellen over Clebsch–Gordan-koeffisienter).
I desintegrasjonen $K_S^0 \to \pi + \pi$ må altså slutt-tilstanden, i følge regelen $\Delta T = 1/2$, ha isospinn 0. Tabellen gir at

$$\begin{aligned} |T = 0, T_3 = 0\rangle \ = \ & \sqrt{\frac{1}{3}}\ |T_3^\pi = 1,\ T_3^\pi = -1\rangle \ - \ \sqrt{\frac{1}{3}}\ |T_3^\pi = 0,\ T_3^\pi = 0\rangle \\ & + \sqrt{\frac{1}{3}}\ |T_3^\pi = -1,\ T_3^\pi = 1\rangle \ . \end{aligned}$$

Altså like stor sannsynlighet for hver av de tre mulighetene $\pi^+ + \pi^-$, $\pi^0 + \pi^0$ og $\pi^- + \pi^+$. To ladde π-mesoner er dobbelt så sannsynlig som to nøytrale.
Fasit: $(68,61 \pm 0,28)\%$ for $\pi^+ + \pi^-$ og $(31,39 \pm 0,28)\%$ for $\pi^0 + \pi^0$.
Q-verdiene er litt forskjellige, men den korreksjonen går i favør av $\pi^0 + \pi^0$, altså i feil retning.