Løsninger, hjemmeeksamen i fag nummer 74 355 Kjernefysikk, tirsdag 30. mai til fredag 2. juni 2000

1a) 12 g av karbon 12 inneholder 1 mol atomer, i følge definisjonen på atommasseenheten, det er $6,022\,045 \times 10^{23}$ atomer. Om vi går ut fra at CO_2 fra atmosfæren inneholder 98,89 % (prosent av massen og ikke av antallet) av ^{12}C, 1,11 % av ^{13}C og ett atom ^{14}C for hvert 10^{12} atom ^{12}C, så vil 10 g karbon i plantemateriale inneholde opprinnelig

$$N_0 = 10^{-12} \times 0,9889 \times \frac{10\,\mathrm{g}}{12\,\mathrm{g}} \times 6,022\,045 \times 10^{23} = 5,0 \times 10^{11}$$

atomer av ^{14}C (det oppgitte tallet 1 pr. 10^{12} er sikkert ikke så nøyaktig at vi kan gi svaret med mer enn en desimal).
Halveringstiden til ^{14}C er 5730 år, dvs. at midlere levetid for et atom er

$$\tau = \frac{5730\,\text{år}}{\ln 2} = 8267\,\text{år} = 8267 \times 365,25 \times 24 \times 3600\,\mathrm{s} = 2,609 \times 10^{11}\,\mathrm{s}\ .$$

Antallet gjenværende atomer av ^{14}C, $N = N(t)$, avtar eksponensielt med tiden t siden karbonet ble tatt opp fra lufta,

$$N = N_0\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\ .$$

Alderen er altså

$$t = \tau \ln\left(\frac{N_0}{N}\right)\ .$$

Selv om vi kunne måle antallet N eksakt, ville alderen være usikker. For det første kan N_0 variere pga. statistiske fluktuasjoner, men siden N_0 er et såpass stort tall, er den relative usikkerheten i N_0 så liten at vi ser bort fra den. For det andre, gitt alderen t, kan N variere pga. statistiske fluktuasjoner. Gitt N_0 og t er N binomialfordelt med middelverdi

$$N_1 = N_0\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\ .$$

Sannsynligheten for at ett bestemt atom ^{14}C overlever et tidsrom t, er

$$P_1 = \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\ ,$$

og sannsynligheten for at N atomer ^{14}C, av N_0 opprinnelig, overlever et tidsrom t, er

$$P_N = \frac{N_0!}{N!(N_0-N)!}\,{P_1}^N(1-P_1)^{N_0-N}\ .$$

I vårt tilfelle vil $P_1 << 1$, og da er dette med god tilnærming lik en Poisson-fordeling med middelverdi $N_1 = N_0 P$, dvs. at

$$P_N \approx \frac{{N_1}^N}{N!}\,\mathrm{e}^{-N_1}\ .$$

Standardavviket for en Poisson-fordeling er

$$\sigma_N = \sqrt{N_1} \approx \sqrt{N}\ .$$

Ta først punkt to i oppgaven, der vi forutsatte at vi kunne telle eksakt de N gjenværende atomene. Da er alderen t usikker bare pga. den statistiske usikkerheten i N, og det relative standardavviket på alderen er

$$\frac{\sigma_t}{t} = \left|\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}N}\right| \frac{\sigma_N}{t} = \frac{\tau}{N} \frac{\sigma_N}{\tau(\ln N_0 - \ln N)} = \frac{1}{\sqrt{N}(\ln N_0 - \ln N)} \ .$$

Vi ønsker å oppnå en relativ usikkerhet $(\sigma_t/t) \leq 0,1$, det vil si at

$$N \geq \frac{100}{(\ln N_0 - \ln N)^2} = \frac{100}{(26,9 - \ln N)^2} \ .$$

Som gir $N \geq 0,12$. Et interessant resultat! Nå sier alminnelig sunn fornuft at hvis $N = 0$, så kan vi aller høyst sette en nedre grense på alderen, og da er usikkerheten i hvert fall større enn 10 %. Den høyeste alderen vi kan måle med 10 % usikkerhet eller bedre, bør altså være når vi finner ett atom. Da estimerer vi alderen til

$$t = \tau \ln N_0 = 222\,700 \text{ år} \ .$$

Men hva er strengt tatt usikkerheten i dette estimatet? Det finnes neppe et entydig svar, men om vi tar en normalfordeling som modell, er sannsynligheten 16 % for et positivt avvik større enn ett standardavvik, og like mye for et negativt avvik større enn ett standardavvik. Her har vi ikke en normalfordeling, men en Poissonfordeling. Dersom vi observerer ett atom, kan vi spørre slik: hva må middelverdien N_1 være for at sannsynligheten for å observere minst ett atom skal være lik 0,16? Vel, sannsynligheten for å observere null atomer er da $P_0 = \mathrm{e}^{-N_1} = 0,84$, altså må $N_1 = -\ln 0,84 = 0,17$. Med en middelverdi på $N_1 = 0,17$ estimerer vi alderen til

$$t = \tau \ln\left(\frac{N_0}{N_1}\right) = 237\,000 \text{ år} \ ,$$

som gir 7 % usikkerhet i alderen, i retning oppover. Andre veien spør vi slik: hva må middelverdien N_1 være for at sannsynligheten for å observere maksimalt ett atom skal være lik 0,16? Jo, sannsynligheten for å observere null atomer eller ett atom er da $P_0 + P_1 = \mathrm{e}^{-N_1}(1 + N_1) = 0,16$, som gir $N_1 = \ln(1 + N_1) - \ln 0,16 = \ln(1 + N_1) + 1,83$, eller $N_1 = 3,29$. Med denne middelverdien estimerer vi alderen til

$$t = \tau \ln\left(\frac{N_0}{N_1}\right) = 213\,000 \text{ år} \ ,$$

som gir 4 % usikkerhet i alderen, i retning nedover.
Denne måten å resonnere på kalles gjerne Bayesisk tolkning av statistikk.
Det var svaret på punkt to i oppgaven, så til punkt en. Forskjellen her er at vi ikke observerer det eksakte antallet atomer N, men vi observerer n desintegrasjoner i løpet av 10 døgn, og sier at

$$N = \frac{n}{Q} \ ,$$

der Q er sannsynligheten for at ett atom ^{14}C desintegrerer i løpet av 10 døgn,

$$Q = 1 - \mathrm{e}^{-x} \approx x \ ,$$

med

$$x = \frac{10\,\text{døgn}}{\tau} = \frac{10\,\text{døgn}}{8267 \times 365,25\,\text{døgn}} = 3,312 \times 10^{-6} \; .$$

Siden N er mye større enn n, kan vi trygt gå ut fra at den vesentlige usikkerheten kommer fra statistiske fluktuasjoner i n, som igjen er binomialfordelt: sannsynligheten for n desintegrasjoner er

$$Q_n = \frac{N!}{n!(N-n)!}\, Q^n (1-Q)^{N-n} \; .$$

Siden $Q << 1$, er dette igjen med god tilnærming lik en Poisson-fordeling med middelverdi $M = NQ$, dvs. at

$$Q_n \approx \frac{M^n}{n!}\, \mathrm{e}^{-M} \; .$$

Standardavviket for Poisson-fordelingen er

$$\sigma_n = \sqrt{M} = \sqrt{NQ} \; ,$$

slik at standardavviket for estimatet $N = n/Q$ er

$$\sigma_N = \frac{\sigma_n}{Q} = \frac{\sqrt{N}}{\sqrt{Q}} \; .$$

Den relative usikkerheten i alderen er nå

$$\frac{\sigma_t}{t} = \left|\frac{\mathrm{d}t}{\mathrm{d}N}\right| \frac{\sigma_N}{t} = \frac{1}{\sqrt{NQ}\,(\ln N_0 - \ln N)} \; .$$

Vi ønsker å oppnå en relativ usikkerhet $(\sigma_t/t) \leq 0,1$, det vil si at

$$N \geq \frac{100}{Q(\ln N_0 - \ln N)^2} = \frac{100}{3,312 \times 10^{-6}\,(26,9 - \ln N)^2} \; .$$

Som gir $N \geq 2,47 * 10^6$. Siden det opprinnelig fantes $5,0 \times 10^{11}$ atomer av ^{14}C, og antallet avtar eksponensielt med tiden t siden karbonet ble tatt opp fra lufta, må vi ha at

$$\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \geq \frac{2,5 \times 10^6}{5,0 \times 10^{11}} = 5,0 \times 10^{-6} \; .$$

Det gir den øvre grensen på alderen:

$$t \leq -\tau \ln(5,0 \times 10^{-6}) = 100\,900\,\text{år} \; .$$

Vi har her ikke tatt hensyn til at detektoren som teller desintegrasjoner neppe er 100 % effektiv. Dessuten vil vi i praksis ha en viss bakgrunnstråling som øker usikkerheten. Istedenfor å gå omveien om Poisson-fordelingen, kunne vi ha brukt direkte formelen for standardavviket til en binomialfordeling:

$$\sigma_n = \sqrt{NQ(1-Q)} \; .$$

1b) Atommasser, i atommasseenheten $\mathrm{u} = 931,502\,\mathrm{MeV}/c^2$:
39,963 999 for ^{40}K, 39,962 591 for ^{40}Ca, 39,962 384 for ^{40}Ar, og 0,000 549 for et elektron.
Desintegrasjonen $^{40}\mathrm{K} \to {}^{40}\mathrm{Ca} + \mathrm{e}^- + \overline{\nu}_\mathrm{e}$ er av typen β^-, og Q-verdien er

$$(39,963\,999 - 39,962\,591)\,\mathrm{u}\,c^2 = 0,001\,408\,\mathrm{u}\,c^2 = 1,312\,\mathrm{MeV}\ .$$

Kjernen ^{40}Ca i sluttilstanden kunne altså få en eksitasjonsenergi på opptil $1,312\,\mathrm{MeV}$. ^{40}Ca er en like-like kjerne, og stort sett den eneste typen eksiterte nivå som kunne tenkes å ha så lav eksitasjonsenergi, er da en vibrasjonseksitasjon med spinn og paritet 2^+. Forutsatt at dette eksiterte nivået har for høy energi til at det er tilgjengelig, må overgangen skje fra grunntilstanden i ^{40}K, med spinn og paritet 4^-, til grunntilstanden i ^{40}Ca, med spinn og paritet 0^+. I så fall er det en tredje-forbudt Gamow–Teller-overgang, og det kan forklare at levetiden er så lang.
Desintegrasjonen $^{40}\mathrm{K} \to {}^{40}\mathrm{Ar} + \mathrm{e}^+ + \nu_\mathrm{e}$ er av typen β^+, men i dette tilfellet er typen ϵ, elektroninnfanging, $^{40}\mathrm{K} + \mathrm{e}^- \to {}^{40}\mathrm{Ar} + \nu_\mathrm{e}$ energetisk fordelaktig. Q-verdien for den er

$$(39,963\,999 - 39,962\,384)\,\mathrm{u}\,c^2 = 0,001\,615\,\mathrm{u}\,c^2 = 1,504\,\mathrm{MeV}\ .$$

Q-verdien for $^{40}\mathrm{K} \to {}^{40}\mathrm{Ar} + \mathrm{e}^+ + \nu_\mathrm{e}$ er to elektronmasser mindre, men tross alt positiv,

$$0,001\,615\,\mathrm{u}\,c^2 - 2m_e c^2 = 0,000\,517\,\mathrm{u}\,c^2 = 0,482\,\mathrm{MeV}\ .$$

Igjen tyder mye på at ikke noe eksitert nivå i ^{40}Ar er tilgjengelig med denne begrensningen på eksitasjonsenergien, og siden grunntilstanden i ^{40}Ar også har spinn og paritet 0^+, er det igjen en tredje-forbudt Gamow–Teller-overgang, så levetiden blir lang.

1c Siden argon er en gass, kan en gå ut fra at stein som dannes av flytende lava, inneholder forsvinnende lite argon opprinnelig. Forutsatt at den argon som kommer fra desintegrasjon av ^{40}K, ikke slipper ut av steinen, så kan en telle atomer av ^{40}Ar og ^{40}K og dermed finne hvor lenge det er siden steinen størknet.
Med en halveringstid på 1,28 milliarder år for ^{40}K, dvs. en midlere levetid på

$$\tau = \frac{1,28\,\text{milliarder år}}{\ln 2} = 1,85\,\text{milliarder år}\ ,$$

og med forgreiningsforholdet 0,11 for $^{40}\mathrm{K} \to {}^{40}\mathrm{Ar}$, så er forholdet mellom antall atomer av ^{40}Ar og ^{40}K etter en tid t:

$$f = \frac{0,11\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}}{1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}} = \frac{0,11}{\mathrm{e}^{\frac{t}{\tau}} - 1}\ .$$

Setter vi $f = 0,2$, gir det at

$$t = \tau \ln\left(1 + \frac{0,11}{f}\right) = \tau \ln 1,55 = 0,809\,\text{milliarder år}\ .$$

Det var kalium-argon-metoden, så til kalium-kalsium-metoden. La N_1, N_2 og N_3 være antallet atomer i en steinprøve av henholdsvis ^{40}K, ^{40}Ca og en annen stabil kalsiumisotop, f.eks. ^{44}Ca, den vanligste nest etter ^{40}Ca. N_3 er konstant i tiden, mens N_1 og N_2 er avhenger av tiden t:

$$N_1(t) = N_{10}\,\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\ , \qquad N_2(t) = N_{20} + N_{10}(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}})\ .$$

Her er N_{10} og N_{20} de opprinnelige antallene. Vi antar at vi har mange steinprøver med ulike verdier av forholdet N_{10}/N_3, men med samme verdi av forholdet N_{20}/N_3. Vi har da at

$$\frac{N_{10}}{N_3} = \frac{N_1(t)}{N_3}\,\mathrm{e}^{\frac{t}{\tau}} \;,$$

og at

$$\frac{N_2(t)}{N_3} = \frac{N_{20}}{N_3} + \frac{N_{10}}{N_3}\,(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}) = \frac{N_{20}}{N_3} + \frac{N_1(t)}{N_3}\,(\mathrm{e}^{\frac{t}{\tau}} - 1) \;.$$

Dette er en lineær relasjon mellom de målbare forholdstallene $N_1(t)/N_3$ og $N_2(t)/N_3$, som begge kan variere fra den ene steinprøven til den andre. Ved å undersøke om den lineære sammenhengen faktisk er gyldig, kan en verifisere at antagelsene som er gjort, er troverdige, foruten at en kan finne verdier for de to ukjente størrelsene N_{20}/N_3 og $\mathrm{e}^{\frac{t}{\tau}} - 1$. Dermed finner en altså alderen t.

1d På grunn av Coulomb-barrieren er det stort sett bare nøytroninnfanging som kan bygge opp tunge atomkjerner, dvs. de som er tyngre enn jern. Under "normale" forhold, f.eks. i det indre av stjerner, er fluksen av frie nøytroner så liten at det tar typisk 20 år for en kjerne å fange inn et nøytron. Dette er det som kalles "s-prosesser", ("s" for "slow"), der kjerner som er ustabile for β-desintegrasjon med levetid vesentlig kortere enn f.eks. et år ikke kan overleve lenge nok til å fange inn nøytroner. Siden det eksisterer isotoper som er nøytronrike, og som ikke lar seg produsere fra noen annen isotop som er stabil nok til å fange inn et nøytron i en s-prosess, kan en slutte at det må ha forekommet "r-prosesser" ("r" for "rapid") under forhold der nøytronfluksen er vesentlig høyere enn i vanlige stjerner. Kanskje i supernovaeksplosjoner.
Siden det også finnes i naturen isotoper som ikke kan ha blitt produsert i r-prosesser, kan en slutte at både s-prosesser og r-prosesser må ha vært virksomme.

1e) Halveringstid og midlere levetid er henholdsvis 713 millioner år og $\tau_1 = 1029$ millioner år for ^{235}U, 4510 millioner år og $\tau_2 = 6507$ millioner år for ^{238}U. Anta at produksjonsraten er λ_1 for ^{235}U og λ_2 for ^{238}U, der $\lambda_1 = 1,64\,\lambda_2$. La N_1 og N_2 betegne antallet atomer av ^{235}U og ^{238}U. Hvis t er tiden etter at produksjonen av uran startet, så varierer N_1 og N_2 med tiden i følge ligningene

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}N_1}{\mathrm{d}t} &= \lambda_1 - \frac{N_1}{\tau_1} \;, \\ \frac{\mathrm{d}N_2}{\mathrm{d}t} &= \lambda_2 - \frac{N_2}{\tau_2} \;. \end{aligned}$$

Ligningen for N_1, f.eks., kan omskrives slik:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(N_1\,\mathrm{e}^{\frac{t}{\tau_1}}\right) = \lambda_1\,\mathrm{e}^{\frac{t}{\tau_1}} \;.$$

Siden vi forutsetter at $N_1 = 0$ ved $t = 0$, har vi da at

$$\begin{aligned} N_1 &= \lambda_1\tau_1\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_1}}\right) , \\ N_2 &= \lambda_2\tau_2\left(1-\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_2}}\right) . \end{aligned}$$

Gitt forholdet N_1/N_2, og gitt produksjonsforholdet $\lambda_1/\lambda_2 = 1,64$, kan vi altså finne tiden t.
Jordisk uran består nå av 0,7205 % ^{235}U og 99,274 % ^{238}U, men dette er masseforholdet mellom isotopene. Antallsforholdet er

$$\frac{238,050\,785}{235,043\,924} \times \frac{0,7205}{99,274} = 0,007\,351 \ .$$

Men etter at Jorda ble til, har den ikke fått tilført noe uran. Alderen til Jorda, eller solsystemet, er ca. $t_S = 4700$ millioner år, og om vi regner bakover, finner vi at antallsforholdet dengang var

$$0,007\,351 \ \frac{e^{\frac{t_S}{\tau_1}}}{e^{\frac{t_S}{\tau_2}}} = 0,344 \ .$$

Setter vi

$$\frac{N_1}{N_2} = \frac{1,64\,\tau_1\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_1}}\right)}{\tau_2\left(1 - e^{-\frac{t}{\tau_2}}\right)} = 0,344$$

og løser for t (numerisk), får vi

$$t = 9100\,\text{millioner år} \ .$$

Tilsammen gir det en alder på universet som er 13,8 milliarder år (pluss en eller to milliarder år før uranproduksjonen startet).
Siden forutsetningene vi har gjort, er ganske usikre, skal vel ikke dette estimatet tas alt for alvorlig, men det virker i hvert fall ganske rimelig.

2a) Standardmodellen har vekselvirkningspartikler, som har heltallig spinn og følgelig er bosoner, pluss materiepartikler, som alle har spinn 1/2 og følgelig er fermioner.
Vekselvirkningspartiklene er 8 masseløse gluoner (for den sterke vekselvirkningen), de 3 tunge partiklene Z^0 og $W^\pm$ (for den svake vekselvirkningen), det masseløse fotonet (for den elektromagnetiske vekselvirkningen), og det masseløse gravitonet (så langt ikke direkte observert, for gravitasjonen). De har alle spinn 1, unntatt gravitonet som har spinn 2.
Materiepartiklene er 6 leptoner og 6 kvarker, og deres antipartikler. Tre negative leptoner: elektronet e^-, myonet μ^- og tauonet τ^-. Tre nøytrale leptoner: elektronnøytrinoet ν_e, myonnøytrinoet ν_μ og taunøytrinoet ν_τ. Tre kvarker med elektrisk ladning 2/3: u, c og t, og tre kvarker med elektrisk ladning $-1/3$: d, s og b. Antallet kvarker skal forresten multipliseres med tre, fordi hver kvark kommer i tre fargevarianter.
Dessuten er det (minst) en partikkel som ennå ikke er observert, og som faller utenfor klassifiseringsskjemaet ovenfor, nemlig Higgs-partikkelen, med spinn 0. Den er nødvendig i standardmodellen for at Z^0 og $W^\pm$ skal kunne ha masse, og den gir dessuten masser til leptonene og kvarkene.
I 1970 regnet en med bare tre kvarker: u, d og s. Et problem med denne første kvarkmodellen var at den forutsa mye for stor sannsynlighet for desintegrasjonen $K^0 \to \mu^+\mu^-$. Glashow, Iliopoulos og Maiani foreslo da at det kanskje eksisterte en fjerde kvark, slik at de uønskede teoretiske bidragene til denne prosessen (i form av Feynman-diagram)

ble kansellert av nye Feynman-diagram der den nye kvarken opptrådte som mellomtilstand. Den nye kvarken ble kalt c, for "charm" (norsk: "magi"), fordi den løste et kinkig problem nær sagt på magisk vis. Da den senere, i 1974, kunne forklare den sensasjonelle oppdagelsen av en svært smal resonans i elektron-positron-spredning, nemlig den partikkelen som kalles ψ, så ble det et stort gjennombrudd for kvarkmodellen (kjent som "novemberrevolusjonen").

2b) Pariteten til π^--mesonet ble målt i reaksjonen $\pi^- + \mathrm{d} \to \mathrm{n} + \mathrm{n}$. Når π-mesonet, som spres mot døyteroner i ro, har tilstrekkelig liten impuls, kan denne reaksjonen bare skje i en s-tilstand, der den relative banedreieimpulsen for π^- og d altså er $\ell_i = 0$. Pariteten til starttilstanden er da

$$P_i = P_\pi P_\mathrm{d} (-1)^{\ell_i} = P_\pi \ ,$$

der P_π er den indre pariteten til π^-, som skal bestemmes, og P_d er den indre pariteten til døyteronet, som er kjent og lik $+1$.
Den totale dreieimpulsen i starttilstanden er 1, fordi π^- har spinn 0 og d har spinn 1, mens $\ell_i = 0$. Den totale dreieimpulsen i sluttilstanden er dermed også 1, fordi dreieimpuls alltid bevares. Den er summen av den relative banedreieimpulsen til nøytronene, med absoluttverdi ℓ_f, og de to nøytronspinnene, som adderer opp til et totalt spinn S som er enten 0 eller 1.
Det finnes følgende fire muligheter for å lage total dreieimpuls 1 i sluttilstanden:
i) $S = 0$ og $\ell_f = 1$; ii) $S = 1$ og $\ell_f = 0$; iii) $S = 1$ og $\ell_f = 1$; iv) $S = 1$ og $\ell_f = 2$.
Men nøytronene er fermioner og må ha en totalt antisymmetrisk bølgefunksjon. Spinnbølgefunksjonen er antisymmetrisk hvis $S = 0$ og symmetrisk hvis $S = 1$. Rombølgefunksjonen (som funksjon av den relative posisjonen til nøytronene) har symmetrien $(-1)^{\ell_f}$. Alternativ iii) er derfor det eneste tilfellet der den totale bølgefunksjonen er antisymmetrisk. Følgelig må sluttilstanden ha paritet

$$P_f = P_\mathrm{n} P_\mathrm{n} (-1)^{\ell_f} = (-1)^{\ell_f} = -1 \ .$$

Forutsatt at pariteten er bevart i reaksjonen, slik at $P_i = P_f$, kan vi slutte at reaksjonen er mulig (ved riktig lav energi) bare dersom π^- har negativ paritet. Merk at konklusjonen er uavhengig av om nøytronet har positiv eller negativ paritet, fordi sluttilstanden har to nøytroner.
Reaksjonen $\pi^+ + \mathrm{d} \to \mathrm{p} + \mathrm{p}$ gir pariteten til π^+ på tilsvarende måte.
For å måle pariteten til π^0 kan en studere f.eks. produksjon av π^0 i reaksjonen $\pi^- + \mathrm{d} \to \mathrm{n} + \mathrm{n} + \pi^0$, og anta at pariteten er bevart i den sterke vekselvirkningen, eller en kan studere polarisasjon av fotonene i desintegrasjonen $\pi^0 \to \gamma + \gamma$, og anta at pariteten er bevart i den elektromagnetiske vekselvirkningen.
Det finnes en generell sammenheng som sier at partikkel og antipartikkel har samme paritet dersom de er bosoner (har spinn $0, 1, 2, \ldots$), og har motsatt paritet dersom de er fermioner (har spinn $1/2, 3/2, 5/2, \ldots$). For eksempel, leptoner og kvarker har spinn $1/2$, de beskrives av Dirac-ligningen, og da er denne relasjonen en konsekvens av Diracligningen.
Fordi kvark og antikvark har motsatt paritet, forutsier kvarkmodellen uten slingringsmonn at π-mesonet må ha negativ paritet. Det er nemlig en bundet tilstand av en kvark q og en antikvark $\overline{q}$, det er opplagt grunntilstanden i dette systemet, slik at den relative banedreieimpulsen må være $\ell = 0$, og da er pariteten

$$P_\pi = P_q P_{\overline{q}} (-1)^\ell = -1 \ .$$

Hvis π-mesonet hadde hatt positiv paritet, så ville kvarkmodellen ha hatt et alvorlig problem med å forklare det.

2c) I følge kvarkmodellen skal kvarkene ha spinn $1/2$, og da sier spinn–statistikk-teoremet at de skal være fermioner. Men en av de tilstandene som kvarkmodellen ser ut til å kunne reprodusere på en naturlig måte, er f.eks. resonansen Δ^{++}, som har masse 1232 MeV, dobbelt elektrisk ladning og spinn $3/2$. Den skulle bestå av tre u-kvarker, og forutsatt at det ikke er noe banedreieimpuls, så må de tre kvarkspinnene være parallelle. Følgelig er spinnbølgefunksjonen fullstendig symmetrisk under ombytte, rombølgefunksjonen er likeså symmetrisk (fordi banedreieimpulsen er 0), og den totale bølgefunksjonen er symmetrisk, ikke antisymmetrisk som den burde være.
Måten å løse denne floken på, er altså å innføre nye kvantetall, slik at hver type kvark kommer i tre varianter med forskjellig “farge”: r, g og b (rød, grønn og blå). Når resten av bølgefunksjonen er symmetrisk, så kan vi gjøre “fargebølgefunksjonen” antisymmetrisk, slik at den totale bølgefunksjonen blir antisymmetrisk.
At fargebølgefunksjonen må være antisymmetrisk i et trekvarksystem, følger av et nytt postulat, som sier at bare partikler som er “fargeløse”, kan observeres. Det samme postulatet impliserer at de partiklene som vi ser i laboratoriet, er de som kan bygges opp av en kvark og en antikvark, eller av tre kvarker, ikke de som kunne lages med f.eks. en, to eller fire kvarker.
Et eksperiment der en måler indirekte antallet fargevarianter av kvarkene, er spredning av elektroner mot positroner, ved en total energi i massesentersystemet på noen GeV. En måler tverrsnittet for å produsere vilkårlige sluttilstander med utelukkende hadroner, uten leptoner, og dividerer med tverrsnittet for å produsere $\mu^-\mu^+$-par. Det observerte forholdet kalles R.
Den fundamentale prosessen er elektromagnetisk, og går gjennom en mellomtilstand som består av et virtuelt foton. Fotonet går over til enten en kvark og en antikvark, eller et myon og et antimyon. Tverrsnittet for en slik prosess er proporsjonalt med kvadratet av ladningen til den partikkelen som produseres, altså proporsjonalt med 1 for et $\mu^-\mu^+$-par, og enten $4/9$ eller $1/9$ for et kvark–antikvark-par, avhengig av om kvarkladningen er $2/3$ eller $-1/3$. Dersom den totale massesenterenergien er 6 til 8 GeV, så fins det nok energi til å parprodusere kvarkene u, d, s og c, men ikke b og t. Da skal forholdet R være summen av de kvadrerte kvarkladningene:

$$R = \frac{4}{9} + \frac{1}{9} + \frac{1}{9} + \frac{4}{9} = \frac{10}{9} \; .$$

For en massesenterenergi over 10 GeV kan også b-kvarken produseres, og da skal

$$R = \frac{10}{9} + \frac{1}{9} = \frac{11}{9} \; .$$

Disse teoretiske verdiene stemmer dårlig med de observerte verdiene, som er i overkant av 3. Men når vi multipliserer antallet kvarker med 3, får vi $10/3$ og $11/3$, som stemmer mye bedre.

3a) Antallet tilstander er $2(2\ell+1)$ for banedreieimpuls ℓ ($\ell = 0, 1, 2, 3$ for s, p, d, f). Faktoren 2 teller spinntilstandene, som i dette tilfellet bare innvirker på degenerasjonen og ikke på energiene. Antallet bundne tilstander er (for sekvensen s,p,d,s,f,p):

$$2(1 + 3 + 5 + 1 + 7 + 3) = 40 \; .$$

Kjernen $^{33}_{16}$S har 16 protoner og 17 nøytroner. Tar vi med nivåene s,p,d, har vi $2(1+3+5)=18$ tilstander for protonene og like mange for nøytronene, som er nok til å ta imot alle de 33 nukleonene. I grunntilstanden for kjernen er derfor 1d det høyeste okkuperte energinivået. Et proton eller et nøytron i dette nivået har, i følge den overforenklede modellen, en bindingsenrgi på $14,20\,\mathrm{MeV}$, som altså er separasjonsenergien.
Effekter som vi da har neglisjert, utenom spinn-bane-koplingen, er paringseffekten (alle protonene er paret, mens det ene nøytronet er uparet, og det øker separasjonsenergien for et proton) og Coulomb-frastøtningen mellom protonene (som reduserer separasjonsenergien for et proton).

3b) Den totale dreieimpulsen for en partikkel er

$$\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L} + \boldsymbol{S}\ .$$

Det er mulig å kvantisere samtidig $\boldsymbol{J}^2$, $\boldsymbol{L}^2$ og $\boldsymbol{S}^2$, og de kvantiserte verdiene er henholdsvis $j(j+1)\hbar^2$, $\ell(\ell+1)\hbar^2$ og $s(s+1)\hbar^2=(3/4)\hbar^2$. Siden $\boldsymbol{L}$ og $\boldsymbol{S}$ kommuterer seg imellom, har vi også at

$$\boldsymbol{J}^2 = (\boldsymbol{L}+\boldsymbol{S})^2 = \boldsymbol{L}^2 + \boldsymbol{S}^2 + 2\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}\ ,$$

eller ekvivalent,

$$\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\left(\boldsymbol{J}^2 - \boldsymbol{L}^2 - \boldsymbol{S}^2\right)\ .$$

Det er to muligheter: $j=\ell\pm(1/2)$. Hvis $j=\ell+(1/2)$, så er

$$\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\left(\left(\ell+\frac{1}{2}\right)\left(\ell+\frac{3}{2}\right) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4}\right)\hbar^2 = \frac{\ell}{2}\,\hbar^2\ .$$

Hvis $j=\ell-(1/2)$, så er

$$\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\left(\left(\ell-\frac{1}{2}\right)\left(\ell+\frac{1}{2}\right) - \ell(\ell+1) - \frac{3}{4}\right)\hbar^2 = -\frac{\ell+1}{2}\,\hbar^2\ .$$

Nivå	Energi i MeV	Degenerasjon
$1s_{1/2}$	$-37,52$	2
$1p_{3/2}$	$-27,51$	4
$1p_{1/2}$	$-24,51$	2
$1d_{5/2}$	$-16,20$	6
$1d_{3/2}$	$-11,20$	4
$2s_{1/2}$	$-11,90$	2
$1f_{7/2}$	$-4,46$	8
$1f_{5/2}$	$+2,54$	6
$2p_{3/2}$	$-1,91$	4
$2p_{1/2}$	$+1,09$	2

Med den oppgitte forenklingen at $\hbar^2\,W(r) = -2\,\mathrm{MeV}$, og med første ordens perturbasjonsteori, får vi en energikorreksjon som er $-\ell\,\mathrm{MeV}$ for $j=\ell+(1/2)$, og $(\ell+1)\,\mathrm{MeV}$ for $j=\ell-(1/2)$.

Det gir den korrigerte energitabellen ovenfor, der degenerasjonen er $2j+1$.
Nivåene $1\mathrm{f}_{5/2}$ og $2\mathrm{p}_{1/2}$ er da ikke lenger bundet.
For å få grunntilstanden i ${}^{33}_{16}\mathrm{S}$ fyller vi opp enpartikkelnivåene nedenfra. Vi fyller opp $1\mathrm{s}_{1/2}$, $1\mathrm{p}_{3/2}$, $1\mathrm{p}_{1/2}$, $1\mathrm{d}_{5/2}$ og $2\mathrm{s}_{1/2}$, da har vi plass til 16 protoner og 16 nøytroner. Det 17. nøytronet må vi plasere i nivået $1\mathrm{d}_{3/2}$. Grunntilstanden skal derfor teoretisk ha spinn $3/2$ og paritet $+$, og det stemmer.
Det laveste eksiterte nivået bør vi få ved å løfte ett nøytron fra $2\mathrm{s}_{1/2}$ til $1\mathrm{d}_{3/2}$. Det skal ikke forandre paringsenergien, og eksitasjonsenergien skal være $0,7\,\mathrm{MeV}$. Spinn og paritet skal være $1/2^+$, pga. det enslige nøytronet i nivået $2\mathrm{s}_{1/2}$.
Vi kunne løfte enten to nøytroner eller to protoner fra $2\mathrm{s}_{1/2}$ til $1\mathrm{d}_{3/2}$, det burde gi to eksiterte nivå med eksitasjonsenergi rundt $1,4\,\mathrm{MeV}$, og med samme spinn og paritet som grunntilstanden, $3/2^+$.
Prøver vi å løfte ett proton, koster det paringsenergi, og det gir derfor trolig høyere eksitasjonsenergi.

3c) Coulomb-potensialet mellom to protoner er

$$V_C = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\ ,$$

slik at

$$\frac{\mathrm{d}V_C}{\mathrm{d}r} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c}\,\frac{\hbar c}{r^2} = -\frac{1}{137,0360}\,\frac{197,329\,\mathrm{MeV\ fm}}{r^2} = -\frac{1,440\,\mathrm{MeV\ fm}}{r^2}\ .$$

Skal vi sammenligne med spinn-banekoplingen fra den sterke vekselvirkningen, kan vi se på fig. 4.16 i læreboka, som viser at for en spinntriplett-tilstand med banedreieimpuls $\ell = 1$, og en avstand mellom nukleonene på 1 fermi, er den potensielle energien av størrelsesorden mellom $-50\,\mathrm{MeV}$ og $-100\,\mathrm{MeV}$. Det er noe uklart hvilken størrelse som kurven her viser r-avhengigheten til, fordi figurteksten sier $V_{so}(r)$, som er $W(r)$ i vår notasjon her, men det stemmer ikke med at dimensjonen er energi. Den mest logiske forklaringen er vel at figuren viser den potensielle energien $V_1 = W(r)\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S}$ for det tilfellet at $\boldsymbol{L}$ og $\boldsymbol{S}$ er parallelle, som gir en total dreieimpuls $\boldsymbol{J} = \boldsymbol{L}+\boldsymbol{S}$ lik 2, og dermed

$$\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S} = \frac{1}{2}\,(\boldsymbol{J}^2 - \boldsymbol{L}^2 - \boldsymbol{S}^2)\ . = \frac{1}{2}\,(6-2-2)\hbar^2 = \hbar^2\ .$$

I Coulomb-tilfellet får vi da en potensiell energi

$$\begin{aligned} V_1 &= \frac{2}{m_p^2\,c^2}\,\frac{1}{r}\,\frac{\mathrm{d}V_C}{\mathrm{d}r}\,\boldsymbol{L}\cdot\boldsymbol{S} = -\frac{2\hbar^2c^2}{m_p^2\,c^4}\,\frac{1,440\,\mathrm{MeV\ fm}}{r^3} \\ &= -\frac{2(197,329\,\mathrm{MeV\ fm})^2}{(938,280\,\mathrm{MeV})^2} = -\frac{0,1273\,\mathrm{MeV\ fm}^3}{r^3}\ . \end{aligned}$$

For en avstand mellom protonene på 1 fm utgjør dette $-0,127\,\mathrm{MeV}$. Fortegnet er det samme som for spinn-bane-potensialet som skyldes kjernekreftene, men den numeriske verdien er noen hundre ganger mindre. Det vesentligste bidraget til denne faktoren er finstrukturkonstanten $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) = 1/137,036$, som karakteriserer styrken av den elektromagnetiske vekselvirkningen.
Det elektromagnetiske spinn-bane-potensialet har imidlertid noe lenger rekkevidde enn det som skyldes kjernekreftene: det første avtar som $1/r^3$, det andre avtar eksponensielt med avstanden r (eksponensialfaktoren er karakteristisk for Yukawa-potensialet).

3d) Forklaringen finnes i fig. 4.14 i læreboka. Spinn-bane-potensialet mellom en innkommende partikkel og en annen partikkel som ligger i ro, gir en kraft som bøyer av den første partikkelen i en retning som ikke avhenger av om den passerer på den ene eller andre siden av den andre partikkelen. Spredningsretningen avhenger bare av spinnretningene til de to partiklene. Resultatet er at den spredte partikkelen har en tendens til å komme ut på den ene siden dersom den har spinn ned, og på den andre siden dersom den har spinn opp. Med andre ord: ser vi på partikler som spres i en bestemt retning, så er spinnet deres polarisert, selv om ingen partikler er spinnpolariserte før spredningen.

3e) Et nukleon som beveger seg inne i en atomkjerne opplever et spinn-bane-potensial som har ett fortegn fra nukleoner på en side, og motsatt fortegn fra nukleoner på den andre siden. Hvis nukleonet er midt inne i kjernen, summeres bidragene fra alle de andre nukleonene til null. Derimot, når nukleonet er nær overflaten til kjernen, så er alle de andre nukleonene på innsiden, slik at alle bidragene har samme fortegn, og summen ikke blir null.

4) Tabell over energinivå, og degenerasjonen $2(2\ell + 1)$:

Nivå	Energi i MeV	Degenerasjon
1s	$-30,842\,211\,12$	2
1p	$-15,874\,389\,45$	6
2s	$-1,837\,981\,22$	2
1d	$-1,136\,457\,51$	10