UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Professor J.S. Høye
Tlf. 3654

EKSAMEN I FAG 74436 KVANTETEORIEN FOR FASTE STOFFER

Lørdag 16. juni 1990

kl.0900-1300

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Godkjent lommekalkulator.

Oppgave 1

a) Hamiltonoperatoren for en harmonisk oscillator kan skrives

$$H = \hbar\omega(a^+a + \tfrac{1}{2})$$

der

$$[a,a^+] = 1 \ .$$

Bestem energiegenverdiene E_n.

b) Fonon-fonon vekselvirkningen består av ledd av typen

$$H_{int} = \sum(\ldots.ABC\ldots.)$$

der A,B og C er operatorene a_{k_i} og $a^+_{k_i}$ med $i = 1,2,3$.

Uttrykt ved a_{k_i} og $a^+_{k_i}$, hvilke ledd er relevante ved fononoverganger?

Hva er bevarelseslovene for bølgetallsvektorene $\vec{k}_i$ og frekvensene ω_i (i=1,2,3) ved fononoverganger i et krystallisk gitter? Hvordan oppstår termisk motstand ved fononprosesser?

c) For små frekvenser har longitudinale og transversale fononer henholdsvis lydhastighetene c_ℓ og $c_t = \gamma c_\ell$ med $\gamma<1$.

Hva er sammenhengen (dispersjonsrelasjonen) mellom frekvens ω og bølgetallsvektor $\vec{k}$ for små ω for de 2 tilfellene?

Et longitudinalt fonon $\vec{k}_1$ og et transversalt fonon $\vec{k}_2$ med små frekvenser, kolliderer slik at et fonon $\vec{k}_3$ dannes. Bestem vinkelen ϑ mellom $\vec{k}_1$ og $\vec{k}_2$ for at prosessen skal være mulig, og hvilken begrensning er det på forholdet k_1/k_2 ?

Oppgave 2

a) En fri elektrongass ved temperaturen $T=0$ har fermienergien ϵ_F . Vis at tettheten av partikler er gitt ved

$$n = 2C\,\epsilon_f^{\frac{3}{2}},$$

og bestem størrelsen C når elektronmassen er m .

b) Elektrongassen utsettes for et konstant magnetfelt $\vec{B}$. Hamiltonfunksjonen endres da med beløpet

$$\Delta H = \sum_i (-\vec{\mu}_i \vec{B})$$

(når en ser bort fra koplingen mellom banebevegelse og magnetfelt). Her er $\vec{\mu}_i$ operatoren for det magnetiske moment for de enkelte elektronene. Komponenten av $\vec{\mu}_i$ langs $\vec{B}$ kan ha to mulige verdier μ_B og $-\mu_B$ der μ_B er Bohrs magneton.

Beregn det midlere magnetiske moment pr. partikkel M dersom magnetfeltet er svakt (ved $T=0$).

[Hint: Benytt resultatet i pkt.a) for å bestemme tetthetene n_+ og n_- av partikler som har henholdsvis verdiene μ_B og $-\mu_B$ for det magnetiske moment. Benytt videre at $\mu_B B \ll \epsilon_f$.]

Oppgave 3

a) Skriv ned antikommuteringsrelasjonene for fermionoperatorene c_k og c_k^+ (der for enkelhets skyld spinnindeksen er inkludert i bølgetallet k).

Tilstandsvektoren for en fermiontilstand er gitt ved

$$|\psi\rangle = \sum_{kk'} f(k,k')c_k^+ c_{k'}^+ |0\rangle$$

der $|0\rangle$ betegner vakuumtilstanden. Beregn den fouriertransformerte av Schrödinger bølgefunksjonen gitt ved

$$\tilde{\psi} = S|\psi\rangle$$

der S for N-partikkeltilstand er gitt ved

$$S = \frac{1}{\sqrt{N!}} \langle 0|\, c_{k_1} c_{k_2} \cdots\cdots c_{k_N} .$$

b) Betrakt 2 elektroner som vekselvirker via Hamiltonfunksjonen

$$H_{BCS} = -V \sum_{kk'} c^{+}_{k\uparrow} c^{+}_{-k\downarrow} c_{-k'\downarrow} c_{k'\uparrow}$$

når energien til hvert av de 2 elektronene ligger i et tynt skall mellom ϵ_f og $\epsilon_f+\hbar\omega_D$ over den fylte fermikule. Ellers er $H_{BCS}=0$. Løsningen av det kvantemekaniske problemet, som H_{BCS} fører til, gir et energigap Δ . Bestem dette energigapet $\Delta=2\epsilon_F-E$ ved å løse likningen

$$(H_0+H_{BCS})|\psi\rangle = E|\psi\rangle$$

hvor

$$|\psi\rangle = \sum_{k'} a_{k'}|k',-k'\rangle$$

$$H_0|k,-k\rangle = \epsilon_k|k,-k\rangle \ .$$

c) Hva er isotopeffekten i forbindelse med supraledning, og er svaret for Δ ovenfor i samsvar med dette ?
Hvordan varierer den spesifikke varme ved lave temperaturer for supraledere ?