UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Førsteamanuensis Asle Sudbø
Tlf: 3403

EKSAMEN I FAG 74436 KVANTETEORIEN FOR FASTE STOFFER
Mandag 6. juni 1994
kl. 0900-1300
Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Matematische Formelsammlung

Oppgave 1

a) En gitter-fermion modell for to koblede $2D$ systemer (to koblede plan) er gitt ved

$$\begin{aligned} H_1 &= t\sum_{n=1}^{2}\sum_{i,j,\sigma} c_{i,\sigma}^{+(n)} c_{j,\sigma}^{(n)} + H_{12} \\ H_{12} &= t_\perp \sum_{i,\sigma}[c_{i,\sigma}^{+(1)} c_{i,\sigma}^{(2)} + h.c.] + T_\perp \sum_{i,\sigma}[c_{i,\sigma}^{+(1)} c_{i,-\sigma}^{+(1)} c_{i,-\sigma}^{(2)} c_{i,\sigma}^{(2)} + h.c.]. \end{aligned}$$

Her betyr $h.c.$ hermitesk konjugert. $c_{i,\sigma}^{+(n)}$ kreerer et fermion på gitterpunkt i i plan n, med spinn σ.

i) Forklar hvilke prosesser de enkelte ledd i H_1 beskriver.

b) En gitter-fermion modell for $S = 1/2$ fermioner er definert på et $2D$ kvadratisk gitter ved Hamilton operatoren

$$\begin{aligned} H_2 &= t \sum_{<i,j>,\sigma} c_{i,\sigma}^{+} c_{j,\sigma} + U \sum_i n_{i,\uparrow}\, n_{i,\downarrow} + V \sum_{<i,j>} n_i\, n_j \\ n_i &= \sum_\sigma n_{i,\sigma}. \end{aligned}$$

$< i,j >$ betyr summasjon over nærmeste naboer, $t > 0$, og $(U, V) \geq 0$. Det antas at Pauli prinsippet innebærer høyst to fermioner på hvert gitterpunkt. Systemet har i gjennomsnitt ett fermion per gitterpunkt, og like mange $\uparrow$ spinn som $\downarrow$ spinn.

i) Forklar hva de to siste leddene i H_2 representerer.

ii) Sett $V = 0$. Forventer du at systemet ved $T = 0$ er en isolator eller et metall når $U/t \gg 1$? Begrunn svaret.

iii) Sett $U = 0$ og $V/t \gg 1$. Tegn opp den spinn fordelingen du forventer på gitteret ved $T = 0$.

Oppgave 2

BCS-modellen H_{BCS} for en superleder er definert ved en effektiv vekselvirkning mellom elektroner

$$\begin{aligned} V_{k,k'} &= -Vf(k,k'); \ |\varepsilon_k - \mu|, \ |\varepsilon_{k'} - \mu| < \omega_0 \\ &= 0; \ \textit{ellers}. \end{aligned}$$

Her er μ kjemisk potensial. ω_0 er en frekvens som definerer hvor den effektive elektron-elektron vekselvirkningen kan være *attraktiv*. H_{BCS} diagonaliseres i middelfelt approksimasjonen ved Bogoliubov transformasjonen

$$\begin{aligned} c^+_{k,\uparrow} &= u_k^{(+)}\gamma_k^+ + u_k^{(-)}\eta_k; \ \ c^+_{-k,\downarrow} = u_k^{(+)}\eta_k^+ - u_k^{(-)}\gamma_k \\ u_k^{2(\pm)} &= \frac{1}{2}[1 \pm \frac{\varepsilon_k - \mu}{E_k}]; \ \ E_k^2 = [\varepsilon_k - \mu]^2 + \Delta_k^2. \end{aligned}$$

Med dette valget av $u_k^{(\pm)}$ finner en

$$H_{BCS} = E_0 + \sum_k E_k \ [\ \gamma_k^+\gamma_k \ + \ \eta_k^+\eta_k \ ]$$

hvor E_0 er en konstant. γ_k og η_k er fermion operatorer, og Δ_k er gapet i deres spektra som må bestemmes fra gap ligningen

$$\begin{aligned} \Delta_k &= -\sum_{k'} V_{k',k} b_{k'} \\ b_k &\equiv \ < c_{-k,\downarrow} \ c_{k,\uparrow} > . \end{aligned}$$

$< A >$ er forventingsverdien av $\hat{A}$ tatt i egentilstanden til den diagonaliserte H_{BCS}.

a) Bruk Bogoliubov transformasjonen til å eliminerere b_k fra gap ligningen, og vis at den kan skrives på formen

$$\Delta_k = -\sum_{k'} V_{k',k}\Delta_{k'}\chi_{k'}(T).$$

Vis derved at ($\beta = 1/k_BT$)

$$\chi_k(T) = \frac{1}{2E_k} \ \tanh(\frac{\beta E_k}{2})$$

ved å bruke at

$$< \gamma_k^+\gamma_k > = < \eta_k^+\eta_k > = \frac{1}{\exp(\beta E_k) + 1}.$$

b) Bruk

$$f(k,k') \ = \ g_k \ g_{k'}.$$

Vis at k- og T-avhengigheten til gapet faktoriserer. Angi k-avhengigheten.

c) Anta at superlederen er definert på et $2D$ kvadratisk gitter, $\varepsilon_k = -2(\cos k_x + \cos k_y)$, og $g_k = \sin k_x \sin k_y$. Skisser typisk Fermi-nivå, definert ved $\varepsilon_k = \mu$, når $\mu < 0$, $\mu = 0$, $\mu > 0$. Angi fortegnet på gapet i 1. Brillouin-sone. Hvor mange null punkter har dette gapet på Fermi-nivå?

d) Hva er forskjellen på en perfekt leder og en superleder? Hvorfor er resistiviteten i en superleder null?

Oppgave 3

En antiferromagnetisk Heisenberg modell for en $S = 1/2$ isolator er definert på et d-dimensjonalt gitter ved Hamilton-operatoren

$$H_H = -J \sum_{<i,j>} S_j \cdot S_j; \; J < 0.$$

$< i, j >$ angir summasjon over nærmeste naboer. Det d-dimensjonale gitteret kan deles opp i to undergittere A og B. Holstein-Primakoff transformasjonen fra spinn-operatorer på A og B til boson-operatorer a_i, b_i er

$$S^A_{i,z} = 1/2 - a_i^+ \, a_i; \quad S^B_{i,z} = -1/2 + b_i^+ \, b_i$$

og tilsvarende for S_{ix}, $S_{i,y}$. Lavenergi eksitasjonene for denne modellen er spinn-bølge kvantene A_q og B_q definert ved Bogoliubov transformasjonen

$$\begin{aligned} a_q &= u_q A_q - v_q B_q^+; \quad b_q = u_q B_q - v_q A_q^+ \\ u_q^2 &= \frac{1}{2}\Big(\frac{d}{\sqrt{d^2 - \gamma_q^2}} + 1\Big); \quad v_q^2 = \frac{1}{2}\Big(\frac{d}{\sqrt{d^2 - \gamma_q^2}} - 1\Big). \end{aligned}$$

a_q, b_q er Fourier transformene til a_i, b_i. Med dette valget av u_q, v_q fåes i harmonisk approksimasjon

$$\begin{aligned} H_H &= \sum_q \omega_q \, [A_q^+ A_q + B_q^+ B_q] \\ \omega_q &= K|J|\sqrt{d^2 - \gamma_q^2} \\ \gamma_q &= \sum_{\alpha=1}^{d} \cos q_\alpha. \end{aligned}$$

Gitterkonstanten er satt lik 1, og K er en numerisk konstant.

a) Vis at dispersjonsrelasjonen for små q er gitt ved

$$\omega_q = K|J|\sqrt{d}\,|q|.$$

b) Bruk Holstein-Primakoff og Bogoliubov transformasjonene til å vise at magnetiseringen på et undergitter A er gitt ved

$$M^A \equiv \sum_i < S_{iz}^A >= \frac{N_A}{2} - \sum_q v_q^2 - \sum_q [u_q^2 + v_q^2] \frac{1}{\exp(\beta\omega_q) - 1}$$

hvor $\beta = 1/k_B T$ og N_A er antall gitterpunkt på A. En kan bruke at $\sum_i a_i^+ a_i = \sum_q a_q^+ a_q$, og at A_q, B_q er Bose-Einstein fordelte.

c) La $d > 2$. Vis at T-avhengigheten til magnetiseringen på undergitter A for lave temperaturer har formen

$$M^A = M_0 - A_A T^{d-1}.$$

Det kan vises (skal ikke vises) at T-avhengigheten til $M^B \equiv \sum_i < S_{iz}^B >$ har samme form.

d) For en ferromagnet gjelder for små q og lave T

$$\begin{aligned} \omega_q &\propto q^2 \\ M &= M_{0F} - A_F\, T^{d/2}. \end{aligned}$$

Forklar forskjellen i temperatur-korreksjonen i magnetiseringen for ferro- og antiferromagneter ved å sammenligne dispersjonsrelasjonene.