UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK
Faglig kontakt under eksamen:
Professor Asle Sudbø
Tlf: 93403

EKSAMEN I FAG 74436 KVANTETEORIEN FOR FASTE STOFFER
30. august 1995
kl. 0900-1500
Tillatte hjelpemidler: Barnett and Cronin: Mathematical Formulae
Rottmann: Mathematische Formelsammlung

Oppgave 1 (Teller 20%)
Den enkleste type superledende gap-funksjon $\Delta(e)$ bestemmes i BCS teorien fra ligningen

$$\Delta(e) = VN(e_F) \int_{-\omega_c}^{\omega_c} de' \, \Delta(e') \, \chi(e')$$
$$\chi(e) = \frac{\tanh(\beta E/2)}{2E}$$

hvor e er eksitasjons spekteret for den ikke-vekselvirkende elektron-gassen målt fra Fermi-nivået e_F, $N(e_F)$ er tetthéten av én-partikkel tilstander på Fermi-nivå, $E = \sqrt{e^2 + \Delta^2}$, $\beta = 1/k_B T$, og V er en svak effektiv attraktiv vekselvirkning mellom elektroner. ω_c er en energi som er mye mindre enn e_F.

a) Finn et eksplisitt uttrykk for Δ ved $T = 0$ når $VN(e_F) \ll 1$. Finn også et uttrykk for kritisk temperatur T_c for systemet når $VN(e_F) \ll 1$, der T_c er den høyeste verdi av temperaturen T som tillater en ikke-triviell løsning $\Delta \neq 0$ av gap-ligningen. Hva blir $\Delta(T = 0)/k_B T_c$?

b) Forklar hva Meissner effekten er, og hvordan en gap-funksjon $\Delta \neq 0$ gir opphav til Meissner-effekten.

c) Forklar ved et enkelt fysisk bilde hvordan en svak elektron-fonon kobling gir opphav til en effektiv svak tiltrekkende vekselvirkning mellom elektroner. Hvordan kan denne svake tiltrekningen overkompensere en sterk Coulomb-repulsjon?

Oppgave 2 (Teller 40%)
a) Skriv ned et uttrykk for Feynman-diagrammet

$$K(\mathbf{q}, \omega) =$$

når det går en total impuls $\mathbf{q}$ og frekvens ω gjennom diagrammet fra venstre mot høyre. (Diagrammet beskriver, i en enkel approksimasjon, par-susceptibiliteten i et metall).

b) Utfør den indre frekvens-summasjonen, og vis at svaret kan skrives på formen

$$K(\mathbf{q},\omega) = \sum_{\mathbf{k}} \left[\frac{[1-n(e_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})]\,[1-n(e_{\mathbf{k}})]}{\omega - e_{\mathbf{k}} - e_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} + i\eta} - \frac{n(e_{\mathbf{k}-\mathbf{q}})\,n(e_{\mathbf{k}})}{\omega - e_{\mathbf{k}} - e_{\mathbf{k}-\mathbf{q}} - i\eta}\right]$$

hvor $n(e_{\mathbf{k}}) = 1 - \theta(e_{\mathbf{k}} - e_F)$, e_F er energien til Fermi-nivået, og η er en infinitesimal positiv størrelse.

c) Se på tilfellet $\omega = 0$, $\mathbf{q} > 0$ hvor en kan bruke at $K(\mathbf{q},\omega)$ er reell (skal ikke vises). Vis at

$$K(\mathbf{q} \to 0, \omega = 0) = -\sum_{\mathbf{k}} \frac{1 - 2n(e_{\mathbf{k}})}{2e_{\mathbf{k}}}$$

Bruk dette resultatet også for temperatur $T > 0$ til å beregne $K(\mathbf{q} \to 0, \omega = 0)$ som funksjon av T.
Hint: Konverter den indre impuls-summasjonen til et energi-integral

$$\sum_{\mathbf{k}} \to N(e_F) \int_{-\omega_0}^{\omega_0} de$$

hvor ω_0 beskriver et tynt energi-skall rundt Fermi-nivå. $N(e_F)$ er én-partikkel tetthet av tilstander på Fermi-nivå. Energier er målt relativt Fermi-nivå. Bruk også at for $T > 0$ har vi

$$n(e_{\mathbf{k}}) = \frac{1}{2}[1 - \tanh(\frac{\beta e_{\mathbf{k}}}{2})];\ \beta = 1/k_B T$$

e) En par-susceptibilitet $\tilde{K}(\mathbf{q},\omega)$ som er renormalisert av mange-partikkel effekter kan finnes ved en resummasjon til uendelig orden i perturbasjons teori, av diagrammet i oppgave a)

$$\tilde{K}(\mathbf{q},\omega) = \frac{K(\mathbf{q},\omega)}{1 - VK(\mathbf{q},\omega)}$$

hvor $V < 0$ er en effektiv koblingskonstant, som beskriver svak attraksjon mellom elektroner. Ved hvilken temperatur divergerer $\tilde{K}(\mathbf{q},\omega)$, og hva signaliserer denne divergensen?

Oppgave 3 (Teller 40%)
Et vekselvirkende mange-partikkel system har en Hamilton-operator gitt ved

$$H = H_0 + V$$

Egenstilstandene og egenverdiene til H_0 forutsettes eksakt kjent, mens V er en perturbasjon som gjør at problemet ikke lenger kan løses eksakt.

a) Angi generelt tidsutviklingen til en tilstand $|\psi(t)>$ og en operator $\hat{O}(t)$ i vekselvirkningsbildet.

b) S-matrisen (evolusjons-operatoren) til et mangepartikkel system er definert ved dens virkning på en mangepartikkel tilstand $|\psi(t)>$, ved ligningen

$$|\psi(t)>= S(t,t')\ |\psi(t')>$$

Vis at i vekselvirkningsbildet er $S(t,t')$ løsningen av integral ligningen

$$S(t,t') = 1 - i\int_{t'}^{t} dt_1\ \hat{V}(t_1)\ S(t_1,t') \qquad . \tag{1}$$

Vis at et formelt eksakt uttrykk for $S(t,t')$ er gitt ved

$$S(t,t') = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-1)^m}{m!} \int_{t'}^{t} dt_1 ... \int_{t'}^{t} dt_m\ T[\hat{V}(t_1)...\hat{V}(t_m)]$$

hvor T er en tidsordningsoperator.

c) Innfør perturbasjonen V adiabatisk, og la $|\phi>$ betegne eksakt egentilstand til det uperturberte systemet, $|\phi>= |\psi(-\infty)>$. Én-partikkel Green's funksjonen $G(\lambda; t-t')$ er definert ved

$$G(\lambda; t-t') = -i < \Psi(0)|T[\hat{c}_\lambda(t')\hat{c}^+_\lambda(t)]|\psi(0)>$$

hvor λ er et vilkårlig sett med kvantetall som beskriver én-partikkel tilstander, og operatorene $\hat{c}_\lambda(t)$ er definert i Heisenberg-bildet. Vis at

$$\hat{c}_\lambda(t) = S(0,t)c_\lambda(t)S(t,0)$$
$$\hat{c}^+_\lambda(t) = S(0,t)c^+_\lambda(t)S(t,0)$$

hvor operatorene $c_\lambda(t)$ er definert i vekselvirkningsbildet. Vis dermed at et formelt eksakt perturbasjonsteori uttrykk for Green's funksjonen er gitt ved (siden S har en perturbasjonsutvikling)

$$G(\lambda; t-t') = \frac{-i < \phi|T[c_\lambda(t)c^+_\lambda(t')S(\infty,-\infty)]|\phi>}{<\phi|S(\infty,-\infty)|\phi>}$$

hvor en kan bruke at

$$< \phi| = \frac{< \phi|S(\infty, -\infty)}{< \phi|S(\infty, -\infty)|\phi >}$$

d) Angi et matematisk kriterium for når en perturbasjons teori til lav orden i V for S og G forventes å være gyldig. Anta at H_0 beskriver et paramagnetisk metall, mens H forventes å beskrive en antiferromagnetisk isolator. Hvor pålitelig er da en perturbasjonsteori til endelig orden i V for S og G? Begrunn svaret.

Oppgave 4 (Teller 20%)
a) Dyson's ligning for én-fermion Green's funksjonen i et vekselvirkende fermion system gir resultatet

$$G(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{\omega - e_{\mathbf{k}} - \Sigma(\mathbf{k}, \omega)}$$

hvor selvenergien $\Sigma = \Sigma_R + i\Sigma_I$ generelt er en kompleks størrelse. Det kan antas at fermionene vekselvirker med Coulomb-krefter. $e_{\mathbf{k}}$ er eksitasjonsenergien til fermionene i det ikke-vekselvirkende tilfellet. Hvilke typer Feynman-diagrammer bidrar til perturbasjonsutviklingen for G og Σ?

b) Vis at $G(\mathbf{k}, \omega)$ kan skrives på formen

$$G(\mathbf{k}, \omega) \approx \frac{z_{\mathbf{k}}}{\omega - \tilde{e}_{\mathbf{k}} + i/\tau_{\mathbf{k}}}$$

når dempningseffekter ikke er altfor store, og vis at $z_{\mathbf{k}}$, $\tilde{e}_{\mathbf{k}}$, og $\tau_{\mathbf{k}}$ er bestemt ved

$$\begin{aligned}
\tilde{e}_{\mathbf{k}} &= e_{\mathbf{k}} + \Sigma_R(\mathbf{k}, \tilde{e}_{\mathbf{k}}) \\
z_{\mathbf{k}} &= (1 - \Gamma(k, \tilde{e}_{\mathbf{k}}))^{-1} \\
\tau_{\mathbf{k}}^{-1} &= -\Sigma_I(\mathbf{k}, \tilde{e}_{\mathbf{k}}) z_{\mathbf{k}} \\
\Gamma(\mathbf{k}, \tilde{e}_{\mathbf{k}}) &= \partial\Sigma_R(\mathbf{k}, \omega)/\partial\omega|_{\omega=\tilde{e}_{\mathbf{k}}}
\end{aligned}$$

c) Hvilken egenskap ved et vekselvirkende mangepartikkkel system karakteriserer en såkalt Fermi-væske? Kvante-wirer og enkelte organiske ledere er eksempler på essensielt én-dimensjonale vekselvirkende elektron systemer. Et slikt system postuleres å ha en én-fermion Green's funksjon gitt ved (T=0)

$$G(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\theta(e_k - e_F)}{\omega_c^{\alpha}\ (\omega - e_k + i\delta)^{1-\alpha}}$$

hvor $\alpha = \sinh^2(V)$, V er en koblings-konstant som beskriver vekselvirkningen mellom elektronene, ω_c er en karakteristisk energi-skala for systemet, og e_k er en-partikkel eksitasjonsspekteret for frie elektroner. Er dette systemet en Fermi-væske for $V \neq 0$? Begrunn svaret, men det er ikke nødvendig med detaljert regning.

Følgende er oppgitt:

$$\int_0^\infty dx \frac{\ln x}{\cosh^2 x} = \ln C$$

hvor C er en rent numerisk konstant som kan antas kjent.

$$\begin{aligned} \theta(x) &= 1 - \theta(-x) \\ &= 1; \quad x > 0 \\ &= 0; \quad x < 0 \end{aligned}$$

Noen Feynman regler for konstruksjon av diagrammer:

i) Med hver linje , assosier en faktor

$$G_0(\mathbf{k}, \omega) = \frac{\theta(e_{\mathbf{k}} - e_F)}{\omega - e_{\mathbf{k}} + i\delta} + \frac{\theta(e_F - e_{\mathbf{k}})}{\omega - e_{\mathbf{k}} - i\delta}$$

hvor δ er en infinitesimal positiv størrelse.

ii) Integrer over indre impulser og frekvenser.

iii) Energi og impuls-bevarelse i hvert vertex.

iv) Prefaktor i et diagram av orden $2M$:

$$i^M \, (2s+1)^F (-1)^F$$

hvor F er antall lukkede fermion-løkker i diagrammet, og s er spinnet til fermionet beskrevet av G_0.