NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE
UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK
Faglig kontakt under eksamen:
Navn: Asle Sudbø
Tlf: 93403

EKSAMEN I FAG 74436 KVANTETEORIEN FOR FASTE STOFFER
Lørdag 18. mai, 1996
kl. 0900-1500
Tillatte hjelpemidler: Barnett and Cronin: Mathematical Formulae
Rottmann: Mathematische Formelsammlung
Rottmann: Matematisk formelsamling

Oppgave 1 (Teller 30%)
En 2. kvantisert versjon av en gitter-fermion modell på et 2-dimensjonalt kvadratisk gitter er definert ved Hamilton-operatoren

$$H = \sum_{i,j,\sigma} t_{ij}\, c^{+}_{i,\sigma}\, c_{j,\sigma} + \sum_{i_1,\ldots i_4} \sum_{\sigma_1,\sigma_2} V_{i_1,\ldots i_4}\, c^{+}_{i_1,\sigma_1}\, c^{+}_{i_2,\sigma_2}\, c_{i_3,\sigma_2}\, c_{i_4,\sigma_1}$$

hvor t_{ij} og $V_{i_1,\ldots i_4}$ er h.h.v. én-partikkel og to-partikkel matrise-elementer. $c^{+}_{i,\sigma}$ er en kreasjons-operator for et gitter-fermion på gitterpunkt i i spinn-tilstand σ i en bestemt atom-orbital.

a) Se på tilfellene
1) $i_1 = i_4;\ i_2 = i_3;\ i_1 \neq i_2$
2) $i_1 = i_2; i_3 = i_4; i_1 \neq i_3$
3) $i_1 = i_2 = i_3; i_4 \neq i_1$.
Gi en tolkning av to-partikkel leddene som fremkommer i disse tre tilfellene.

b) Se på tilfellet $i_1 = i_2 = i_3 = i_4$, og kun nærmeste nabo hopping $t_{ij} = t$. Begrunn hvorfor et slikt to-partikkel ledd gir opphav til en antiferromagnetisk korrelasjon mellom $S = 1/2$ fermion-spinn når systemet er halv-fylt, og $0 < V_{i_1,\ldots i_1} >> |t|$. (Et kvalitativt argument er tilstrekkelig, det er ikke nødvendig med detaljert regning).

c) To propagatorer (Greens'-funksjoner) på denne gitter-fermion modellen er definert ved

$$G_1(t'-t, i'-i) = -i < \Psi(0)|T[\hat{c}_{i',\sigma}(t')\ \hat{c}^{+}_{i,\sigma}(t)]|\Psi(0) >$$
$$G_2(t'-t, i'-i) = -i < \Psi(0)|T[\hat{c}_{i',\uparrow}(t')\ \hat{c}_{i',\downarrow}(t')\ \hat{c}^{+}_{i,\downarrow}(t)\ \hat{c}^{+}_{i,\uparrow}(t)]|\Psi(0) >$$

hvor T betyr et tidsordning symbol, $|\Psi(0) >$ er eksakt egentilstand til H i Heisenberg-bildet, og $\hat{c}_{i,\sigma}(t)$ er en tidsavhengig operator i Heisenberg-bildet

$$\hat{c}_{i,\sigma}(t) = e^{iHt}\, c_{i,\sigma}\, e^{-iHt}$$

Gi en tolkning av størrelsene $G_1(t'-t, i'-i)$ og $G_2(t'-t, i'-i)$.

d) Anta at $i = i'$, og at systemet beskrevet ved $|\Psi(0)>$ er slik at

$$G_1(t-t', 0) \sim e^{i\omega(t-t')}$$

Er dette systemet et metall? Begrunn svaret.

Oppgave 2 (Teller 40%)

a) I den ekstreme lavtetthetsgrensen har et tre-dimensjonalt helium He^4 Bose-system (He^4: Helium-kjernen har to protoner og to nøytroner) en Hamilton-operator gitt ved

$$H_0 = \sum_q \Omega_q \, B_q^+ \, B_q$$

hvor Ω_q er eksitasjonsenergien til bosoner med bølgetall q. Beregn eksplisitt én-partikkel-propagatoren

$$D_0(q,t) = -i < \phi | T[\hat{B}_q(t) \, \hat{B}_q^+(0)] | \phi >$$

hvor notasjonen er som i Oppgave 1, og $|\phi>$ er eksakt egentilstand til dette ikke-vekselvirkende systemet. Beregn også Fourier-transformen,

$$D_0(q,\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} dt \; e^{i\omega t} \, D_0(q,t)$$

Har dette systemet veldefinerte én-partikkel eksitasjoner? Begrunn svaret.

b) Ved høyere tettheter blir He^4-systemet vekselvirkende, med en Hamilton-operator gitt ved

$$\begin{aligned} H &= H_0 + \sum_{q,q',q''} F(q'') \, B_{q+q''}^+ \, B_{q'-q''}^+ \, B_{q'} \, B_q \\ &\equiv H_0 + V \end{aligned}$$

hvor $F(q'')$ er en effektiv vekselvirkning mellom He^4 atomer formidlet av et boson, som vi kaller et A-boson. $F(q)$ er altså propagatoren for dette A-bosonet, som antas frekvensuavhengig, dvs. instantan vekselvirkning mellom He^4-atomene. Den eksakte propagatoren for det vekselvirkende He^4-systemet kan skrives

$$D(q,t) = -i \, \frac{< \phi | T[B_q(t) \, B_q^+(0) \, S(\infty, -\infty)] | \phi >}{< \phi | S(\infty, -\infty) | \phi >}$$

$$S(t,t') = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(-i)^m}{m!} \int_{t'}^{t} .. \int_{t'}^{t} dt_1 ... dt_m \; T[V(t_1)..V(t_m)]$$

hvor $O(t) = e^{iH_0 t} \, O \, e^{-iH_0 t}$. Finn null-temperatur korreksjonen til én-partikkel propagatoren $D(q,t)$ for He^4-systemet til 1. orden i $F(q)$, uttrykt ved F og D_0. Resulterende

summer og integraler kreves *ikke* utregnet.

c) Anta at H_0 beskriver en normalt flytende He^4-væske. Anta også at H beskriver, ved lave nok temperaturer, en superfluid He^4-væske, som skiller seg fra den normalt flytende væsken ved en faseovergang. Den superfluide væsken kjennetegnes ved null viskositet. Vil resultatet fra punkt b) kunne brukes til å konkludere noe om hva grunntilstanden til H er ved slike lave temperaturer? Begrunn svaret.

d) Vil systemet i pkt. c) fremvise en Meissner-effekt ved lave nok temperaturer? Gi en kort begrunnelse for svaret.

Oppgave 3 (Teller 30%)
Ligningen til selvkonsistent bestemmelse av superledende ordensparameter Δ_k i et system er gitt ved, i BCS-middelfelt tilnærming

$$\Delta_k = -\sum_{k'} V_{k,k'}\, \Delta_{k'}\, \frac{\tanh(\beta E_{k'}/2)}{2E_{k'}}$$
$$E_k = \sqrt{(e_k - \mu)^2 + |\Delta_k|^2}$$

hvor e_k er elektron-eksitasjons-spekteret i normal tilstand, μ er kjemisk potensial, og $\beta = 1/k_B T$. Anta at

$$V_{k,k'} = \sum_{\nu=1}^{2} \lambda_\nu\, g_\nu(k)\, g_\nu(k')$$

hvor λ_ν kan antas kjente, og $g_\nu(k)$ er lineært uavhengige funksjoner.

a) Vis at Δ_k kan skrives på formen

$$\Delta_k = \sum_{\nu=1}^{2} \Delta^{(\nu)}(T)\, g_\nu(k)$$

b) Finn et sett med koblede ligninger til bestemmelse av amplitudene $\Delta^{(\nu)}(T)$.

c) Anta at systemet er to-dimensjonalt, og at

$$g_1(k) = 1$$
$$g_2(k) = \cos(k_x) - \cos(k_y)$$

Et eksperimentelt resultat for $|\Delta_k|$ på Fermi-nivå i kopper-oksydet $Bi_2Sr_2CaCu_2O_8$ er vist i det to figurene nedenfor (H. Ding *et al.*, Phys. Rev. Lett., 74, 2784 (1995)). Fermi-nivået i 1. Brillouin-zone er angitt i panelene til høyre i Fig. 1. Γ representerer senteret i 1. Brillouin-zone, horisontal akse er k_x-akse, og vertikal akse er k_y-akse. De heltrukne linjene i 1. Brillouin-zone i panelene til høyre i Fig. 1 viser Fermi-nivået.

Er dette eksperimentelle resultatet konsistent med en Ansatz $\Delta^{(1)}(T) \neq 0$, $\Delta^{(2)}(T) = 0$? Begrunn svaret. (For å vite hvor på Fermi-nivået man måler $|\Delta_k|$ i Fig. 2, se nummereringen i Fig. 1).

Fig.1

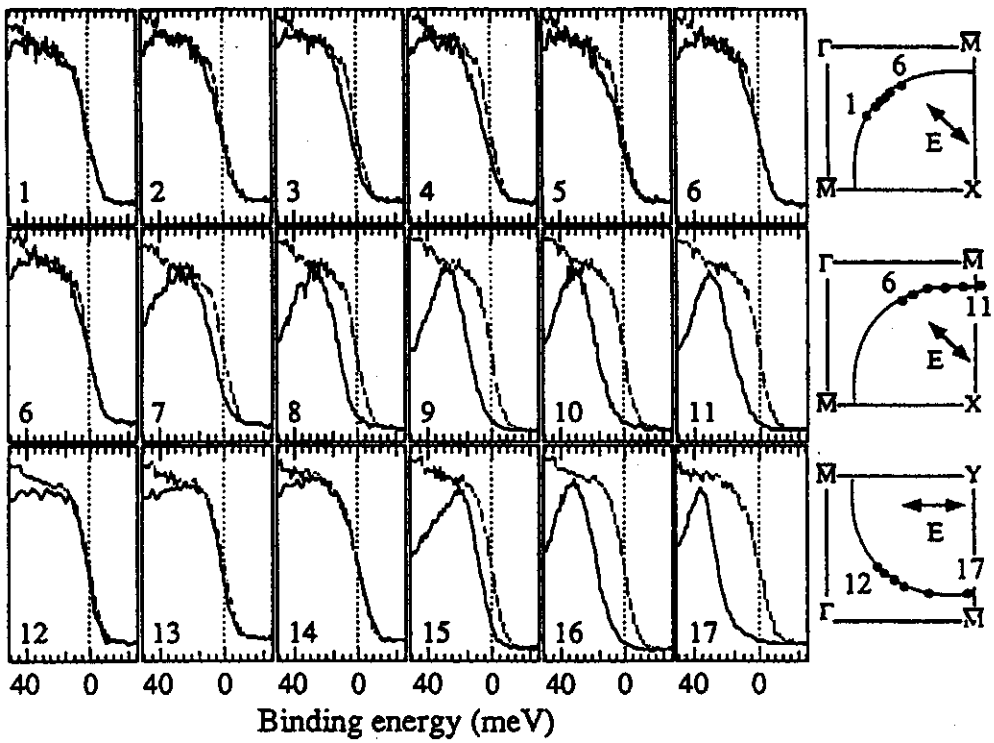
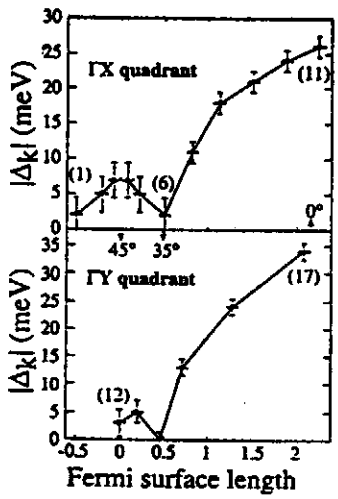


Fig.2



Absolute values of the superconducting gap along the FS in Bi2212. The numbers on the points correspond to the data labeled in Fig. 2. The x axis is in units of k (the length of Γ-$\overline{M}$ is π). Some angles relative to the X, Y-$\overline{M}$ direction are also indicated..

Følgende opplysninger kan, men trenger ikke, være til nytte:
i)

$$\int_0^\infty dx \, \frac{\ln(x)}{\cosh^2(x)} = \ln\left(\frac{\pi e^{-\gamma}}{4}\right)$$

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left[\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l} - \ln(n) \right] = 0.577....$$

ii) London penetrasjons dybde λ_L i et system er gitt ved:

$$\lambda_L = \sqrt{\frac{m}{n_s q^2}}$$

hvor m er massen til partiklene i systemet, n_s er den superfluide tettheten, og q er ladningen til partiklene i systemet. Magnetisk permeabilitet i vakuum er satt lik 1.

iii) Fri fermion én-partikkel propagator

$$G_0(k,\omega) = \frac{\theta(e_k - e_F)}{\omega - e_k + i\delta} + \frac{\theta(e_F - e_k)}{\omega - e_k - i\delta}$$

hvor k, ω er h.h.v. bølgetall og frekvens til fermionet, og e_k er energi-spekteret til den frie fermion-gassen.

$$\begin{aligned} \theta(x) &= 1, \quad x > 0 \\ &= 0; \quad x < 0 \end{aligned}$$

iv) Wick's teorem: Grunntilstands forventningsverdi av et produkt av boson operatorer beregnes som produktet av forventningsverdiene av all mulige par av én kreasjons-operator og én destruksjons-operator. Destruksjons- og kreasjons-operatoren skal bringes til å stå ved siden av hverandre når forventningsverdien av paret skal beregnes. Hver kommutasjon av boson-operatorer gir en faktor +1.