NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Alex Hansen
Tlf. 93649

EKSAMEN I FAG 74436 KVANTETEORIEN FOR FASTE STOFFER
Onsdag 2. juni, 1999
kl. 0900–1300

Tillatte hjelpemidler: Rottmann: Matematische Formelsammlung
Rottmann: Matematisk formelsamling
Barnett and Cronin: Mathematical Formulae
Godkjent kalkulator

Oppgave 1

Vi skal i denne oppgaven studere den én-dimensjonale ferromagnetiske Heisenberg modellen. Hamilton-operatoren er

$$H = -J \sum_{i=1}^{N} \vec{S}_i \cdot \vec{S}_{i+1} \,. \tag{1}$$

Vi antar at spinn-kjeden danner en ring slik at $\vec{S}_{N+1} = \vec{S}_1$ (det vil si periodiske grensebetingelser). Spinn-operatorene $\vec{S}_i = (S_i^x, S_i^y, S_i^z)$ oppfyller kommutatorene $[S_i^x, S_j^y] = i\delta_{ij} S_i^z$, $[S_i^z, S_j^x] = i\delta_{ij} S_i^y$ og $[S_i^y, S_j^z] = i\delta_{ij} S_i^x$. Vi antar egenverdiene til S_i^z er $S = \pm 1/2$. Vi innfører heve og senkeoperatorene $S_i^+ = S_i^x + iS_i^y$ og $S_i^- = S_i^x - iS_i^y$.

a) Hvorfor kalles S_i^+ og S_i^- spinn heve- og senke-operatorer?

b) Vis at Hamilton-operatoren (1) kan skrives

$$H = -J \sum_{i=1}^{N} \left[S_i^z S_{i+1}^z \; + \; \frac{1}{2} \; (S_i^+ S_{i+1}^- + S_i^- S_{i+1}^+) \right] \,. \tag{2}$$

c) Beskriv grunntilstanden $|0\rangle$ til Hamilton-operatoren (1). Hva er grunntilstandsenergien?

d) Er spinn-flipp tilstanden $|i\rangle = S_i^-|0\rangle$ en energi-egentilstand? Hva blir $H|i\rangle$?

e) Gå til planbølgebasis hvor spinnflipptilstanden $|i\rangle$ er gitt ved

$$|i\rangle = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_k |\tilde{k}\rangle e^{-ikR_j} \ . \tag{3}$$

$R_j = ja$ er posisjonen til gitterpunkt j og a er gitterkonstanten. Løs Schrødingerligningen i denne basisen og vis at energiegentilstandene er $|\tilde{k}\rangle$ og energispekteret er

$$E_k = -\frac{NJ}{4} + J(1 - \cos ka) \ . \tag{4}$$

Dette er spinn-bølge spekteret.

f) Hva ønsker man å oppnå ved Holstein-Primakoff transformasjonen?

g) Dyson-Maleev transformasjonen er gitt ved

$$S_i^+ = a_i^\dagger \left(1 - a_i^\dagger a_i\right) \ , \tag{5}$$

$$S_i^- = a_i \tag{5}$$

og

$$S_i^z = \left(a_i^\dagger a_i - \frac{1}{2}\right) \ . \tag{6}$$

Vis at hvis $[a_i, a_j^\dagger] = \delta_{ij}$, $[a_i, a_j] = 0$ og $[a_i^\dagger, a_j^\dagger] = 0$, så oppfyller S_i^z, S_i^+ og S_i^- spinn-kommutatorene $[S_i^+, S_j^-] = 2\delta_{ij}S_i^z$, $[S_i^z, S_j^+] = \delta_{ij}S_i^+$ og $[S_i^-, S_j^z] = \delta_{ij}S_i^-$. Du får bruk for identitene $[AB, C] = A[B, C] + [A, C]B$ og $[A, BC] = [A, B]C + B[A, C]$.

h) Vis at Hamilton-operatoren (1) til annen orden i a_i og $a_i^\dagger$ kan skrives

$$H = -\frac{NJ}{4} + \frac{J}{2} \sum_{i=1}^{N} \left(a_i^\dagger a_i + a_{i+1}^\dagger a_{i+1} + a_i^\dagger a_{i+1} + a_i a_{i+1}^\dagger\right) \ . \tag{7}$$

i) Diagonaliser (7).

j) Hva er betydningen av de høyere-ordens termene som er neglisjert i (7) i forhold til (1)? Sammenlign spekteret du nå har funnet med det vi fant i ligning (4).

<u>Oppgave 2</u>

a) Gitt en dispersjonsrelasjon $E = E(\vec{k})$, hva er den tilhørende tilstandstettheten?

b) Vi antar en tilstandstetthet

$$g(E) = g_0 \frac{|E - E_F|}{\sqrt{(E - E_F)^2 - \Delta^2}}, \tag{8}$$

hvor g_0 er tilstandstettheten til det uperturberte systemet: $g = g_0$ når $\Delta = 0$. Vi antar at g_0 er konstant lik $1/VW$ hvor V er systemets volum. E_F er Fermienergien. Skisser $g(E)$. Hva er tolkningen av Δ?

c) Vis at forandringen til ledende orden av elektronenes totalenergi når Δ øker fra null til en endelig verdi, er gitt ved

$$\delta E \approx \frac{\Delta^2}{2W} \log\left(\frac{\Delta}{W}\right). \tag{9}$$

Anta at Fermienergien ikke endres under denne prosessen og $E_F \approx W$. Anta videre at $\Delta \ll W$. Legg merke til at dette uttrykket *divergerer* når $\Delta \to 0$. Dette er Peierls-ustabiliteten.