NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

LØSNING

Eksamen i fag SIF 4049 og 74440, Ladete Partiklers Fysikk

Tirsdag 30. mai 2000 0900–1400 (5 timer)

Oppgave 1

a)
Transformasjon av el.mag. felt: Se komp. LPF. Kap. 1 avsnitt 1.6.2 s. 1/22.

a1: $E_y < cB_z$: En transformasjonshastighet i x-retningen $V = E_y/B_z$ vil fjerne det elektriske feltet i det bevegede koordinatsystemet:

$$\underline{\underline{E_y' = 0}} \qquad \underline{\underline{B_z' = B_z\sqrt{1-V^2/c^2} = B_z/\gamma_T}}$$

a2: $E_y > cB_z$: En transformasjonshastighet i x-retningen $V = c^2B_z/E_y$ vil fjerne det magnetiske feltet i det bevegede koordinatsystemet:

$$\underline{\underline{B_z' = 0}} \qquad \underline{\underline{E_y' = E_y\sqrt{1-V^2/c^2} = E_y/\gamma_T}}$$

b)
Shockley-Ramo teoremet: Se komp. LPF. Kap. 1 avsnitt 1.7.

c)
Busch-teoremet er bevarelsessatsen for generalisert dreieimpuls om symmetriaksen, gyldig for aksialsymmetriske feltkonfigurasjoner og relativistiske partikler.

Begrensninger:
- Aksialsymmetriske feltkonfigurasjoner
- Strålings-reaksjonskrefter er neglisjert

Oppgave 2

a)
Vandrebølgefrekvens $\omega_e = \omega_c$ og ledemagnetfelt $B(t)$:

Protoner (q,m) akselereres i en sirkelbane med konstant baneradius R_o. Den elektriske vandrebølgen må da sirkulere med vinkelhastighet ω_e lik syklotronfrekvensen i ledemagnetfeltet $\omega_c = -qB(t)/m$:

$$\omega_e = -\frac{qB}{m} = -\frac{qB}{\gamma m_o} = -\frac{qB}{m_o}\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}} = -\frac{qB}{m_o}\sqrt{1-\frac{R_o^2\omega_e^2}{c^2}}$$

Løses m.h.p. ω_e :

$$\omega_e(B) = \frac{\dfrac{qB}{m_o}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{qBR_o}{m_o c}\right)^2}}$$

Dette kan også skrives $$\frac{1}{\omega_e^2} = \frac{1}{\omega_o^2} + \frac{1}{\omega_\infty^2} \qquad \omega_o \equiv -\frac{qB}{m_o} \qquad \omega_\infty \equiv \frac{c}{R_o}$$

b)

CERN's Super Proton Synchrotron SPS:

Første konstruksjonstegninger til SPS ble laget i 1964. 1. april 1976 ble konstruksjons-ytelsen nådd, med 10^{13} ppp (protons per pulse) ved 400 GeV, til en kostnad 1150 mill. sveitserfranc.

Beregning av $\gamma \equiv m/m_o$ *og* $\kappa \equiv W_{kin}/m_o c^2$ *:* W_{kin} = 400 GeV

Protoners hvilemasse i eV: $m_o c^2/q$ = 0.939 GeV

Herav: κ = 425.8 γ = 426.8

Beregning av impulsforholdet $\eta \equiv p/m_o c$ *:*

$$\kappa = \sqrt{1+\eta^2} \qquad \eta = \sqrt{\kappa^2 - 1} = 425.8 \approx \kappa$$

Magnetfelt ved slutten av akselerasjonsperioden (midlet over omkretsen) :

$$R_o = \frac{mv}{qB} = \frac{p}{qB} = \frac{\eta m_o c}{qB} \qquad B = \frac{m_o c}{qR_o}\eta$$

$m_o c/q$ = protonets "hvileimpuls" = 3.131

B_{max} = 1.212 Tesla

Differansen mellom lyshastigheten og protonhastigheten :

$$\gamma \equiv \frac{1}{\sqrt{1-v^2/c^2}} \qquad v = c\sqrt{1-1/\gamma^2}$$

Bruk 1. ordens utvikling av roten, da $\gamma^2 >> 1$:

$$v \approx c\left(1-\frac{1}{2\gamma}\right) \qquad \Delta v \approx \frac{c}{2\gamma} = 823.5 \text{ m/s}$$

c)

Ekvivalent akselerator :

Når et relativistisk proton støter mot et proton i ro i laboratoriet, ligger mesteparten av energien i bevegelsesenergien til det felles tyngdepunktsystemet. I foreliggende spørsmål må vi transformere protonenergien W_{k2} fra laboratoriesystemet (med et proton i ro) til W_k i tyngdepunktsystemet, og finne den W_{k2} som gir W_k = 400 GeV.

Protonhastighet i tyngdepunktsystemet v_c *:*

$$\kappa \equiv \frac{W_k}{m_o c^2} = \gamma - 1 = \frac{1}{\sqrt{1-v_c^2/c^2}} - 1 \qquad \text{gir} \qquad v_c = \frac{c\sqrt{\kappa^2+2\kappa}}{\kappa+1}$$

Transformasjon til system hvor et proton er i ro, d.v.s. transformasjonshastighet $V = -v_c$:

Her har det andre protonet hastighet v_2 : $$v_2 = \frac{v_c - V}{1 - v_c V / c^2} = \frac{2v_c}{1 + v_c^2 / c^2}$$

$$\kappa_2 = \gamma_2 - 1 = \frac{1}{\sqrt{1 - v_2^2 / c^2}} - 1$$ Innsatt for v_2 gir dette: $$\kappa_2 = \frac{2}{1 - c^2 / v_c^2}$$

Innsatt for v_c finner vi til slutt den ønskede κ_2 :

$\underline{\underline{\kappa_2 = 2\kappa(\kappa + 2)}} = 3.643 \cdot 10^5$ $\underline{\underline{W_k = \kappa_2 \cdot m_o c^2 / q = 34.21 \text{ TeV}}}$

Ved bruk av samme maksimale ledemagnetfelt som i SPS krever dette en midlere synkrotronradius:

$$R_2 = \frac{m_o c}{qB}\eta = \frac{m_o c}{qB}\sqrt{\kappa_2^2 - 1} \approx \frac{m_o c}{qB}\kappa_2 = R_o \cdot \frac{\kappa_2}{\kappa} = R_o \cdot 2(\kappa + 2) = 855.6\, R_o \quad \underline{\underline{R_2 \approx 941 \text{ km}}}$$

En slik akseleratorradius synes noe upraktisk.

Oppgave 3

a)

Ambipolar diffusjon: Se kompendiets Kap.7. Ambipolar diffusjon opptrer i en i middel nøytral blanding av negative ion (vanligvis elektroner) og positive ion med så store tettheter $n_e \approx n_i = n$ at elektronene ikke kan diffundere bort fra ionene p.g.a. Coulomb-kreftene. Elektroner og ioner må da diffundere med en felles ambipolar diffusjonshastighet, slik at partikkel-diffusjonsstrømtettheten blir gitt ved $\underline{\underline{\vec{j} = -D_a \cdot \nabla n}}$.

Dette er da definisjonslikningen for den ambipolare diffusjonskoeffisienten D_a.

Et plasma er en i middel nøytral gass inneholdende minst én type fri ladninger, og hvor ladningstett-heten av hvert fortegn er så stor at all diffusjon blir ambipolar.

b) Se kompendiets Kap.7. En antar en gitt tetthetsgradient dn/dx og en felles partikkel-strømtetthet j som opprettholdes av Coulombfeltet E:

(1) $j_e = -\mu_e n E + D_e dn/dx$, $=$ $j_i = \mu_i n E + D_i dn/dx = j$ Ved eliminasjon av det ambipolarefeltet E fås:

(2) $$j = -\frac{D_e\mu_i + D_i\mu_e}{\mu_e + \mu_i} \cdot \frac{dn}{dx} = -D_a \cdot \frac{dn}{dx} \qquad \underline{\underline{D_a = \frac{D_e\mu_i + D_i\mu_e}{\mu_e + \mu_i}}}$$

Nernst-Townsend-relasjonen: $D_{e,i}/kT = \mu_{e,i}/q$ gir $\underline{\underline{D_a = \frac{2D_e D_i}{D_e + D_i} \approx 2D_i}}$

c)

Plasma mellom plane flater: Dette er kompendiets Kap.8.2, men for et plant system (som gir enklere likninger enn sylindrisk).

Tapet av ladninger til veggene ved ambipolar diffusjonstrømtetthet $j = -D_a \cdot dn/dx$ må balanseres av ladningsproduksjon i gassen ved elektronstøtionisasjon $\beta E_0 n$ drevet av z-feltet E_0. Kontinuitetslikningen gir

(3) $$\frac{dj}{dx} = -D_a \frac{d^2 n}{dx^2} = \beta E_0 n \qquad \underline{\frac{d^2 n}{dx^2} + \frac{\beta E_0}{D_a} n = 0}$$ Grensebetingelser: $n(\pm d) = 0$ $n(x) \geq 0$

Eneste løsning blir da $$\underline{\underline{n(x) = n_0 \cos\sqrt{\frac{\beta E_0}{D_a}} x}} \qquad \textit{hvor} \quad \sqrt{\frac{\beta E_0}{D_a}} = \frac{\pi}{2d} \qquad \underline{\underline{E_0 = \frac{\pi^2 D_a}{4\beta d^2}}}$$

d)

Definisjon av utladningstyper: Se kompendiets Kap.9.1.1.C for definisjoner av utladningstypene. Helt skjematisk:

Townsendutladning: Romladningsfelt sekundære, katodemekanismer krever $U_{kat} \gg U_{ionisasjon}$

Glimmutladning: Romladningsfelter dominerer, katodemekanismer krever $U_{kat} \gg U_{ionisasjon}$

Bueutladning: Romladningsfelter dominerer, katodemekanismer krever $U_{kat} \approx U_{ionisasjon}$

Townsend-overslagsmekanismen består i at utladningsstrømmen bygger seg opp av elektronlaviner som hver forårsaker nye laviner ved tilbakekobling (sekundærionisasjon) til katoden med reproduksjonsfaktor $\mu > 1$. Den derav følgende eksponensielle strømvekst blir fort overeksponensiell p.g.a. romladningsforvrengning av det påtrykte elektriske felt, som gjerne øker μ..

Streamer- eller kanal-mekanismen består i at når en enkeltlavine blir stor nok, kan stråling fra lavinehodet danne sekundærelektroner i gassen rundt lavinehodet. De sekundærelektroner som ligger feltmessig gunstig til vil danne nye store laviner. På denne måten kan en elektronlavine starte nye laviner *foran* seg, hvor romladningsfeltet forsterker det påtrykte felt. Videre kan en plasmastreng som kommer fra en positiv elektrode (streamer) danne elektronlaviner foran seg som forlenger strengen.

Trondheim 001025 R S Sigmond