

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:
Prof. E.H. Hauge
Tlf. 3651

EKSAMEN I FAG 74941 FASEOVERGANGER OG KRITISKE FENOMENER
Fredag 20.august 1993
kl.0900 - 1500.

Tillatte hjelpeemidler: Godkjent lommekalkulator.
Rottmann: Mathematische Formelsammlung.
Barnett og Cronin: Mathematical Formulae.

- NB 1. Alle underpunkt i oppgavesettet har i utgangspunktet lik vekt.
2. Vær oppmerksom på at et punkt ofte kan besvares uavhengig av tidligere punkt i oppgaven.

Oppgave 1

- a Beskriv kort tankegangen som ligger bak Landau-teorien for kontinuerlige og svakt første ordens faseoverganger.
- b Hva er konsekvensen av at Landaus fri energi inneholder et lineært ledd, $-h\psi$, der ψ er ordensparameteren (skalar, vektor,...) og h er det tilsvarende "ytre felt" (skalar, vektor,...)?
- c Hva er konsekvensen av at Landaus fri energi inneholder et tredjeordensledd?
Hvor pålitelige er Landaus predikasjoner på dette punkt?
- d Den kritiske eksponenten α er definert ved at den karakteriserer singulariteten i varmekapasiteten $C_{h=0}$. Hva betyr betingelsen "h=0" i forbindelse med
(i) en ferromagnet
(ii) en antiferromagnet
(iii) et gass-væske system
(iv) et monolag Kr-atomer adsorbert på en grafittoverflate?

Oppgave 2

- a Forklar kort ideen bak Niemeijer og van Leeuwen's direkteroms renormaliseringstransformasjon. Hva innebærer utnevnelsen av et "lederspinn" i øverste venstre hjørne, med 4 spinn pr. celle som vist i figur 2.1.

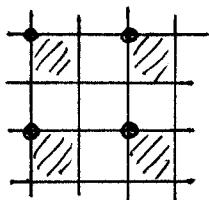


Fig. 2.1

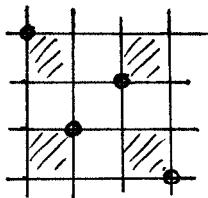
- b Vis at i første kumulanttilnærmelse får transformasjonen under pkt. a formen

$$K' = 2K \frac{(x+2-x^{-1})(x+2+x^{-1})}{(x+6+x^{-1})^2} = 2K f(x)$$

der $x = e^{4K}$ og $K = J/k_B T$ med J som nærmeste nabo kopling. Vis ved å skissere $f(x)$ for $0 < x < \infty$ at denne transformasjonen har et ikke-triviert fikspunkt for $K > 0$ (ferromagnetisme, F) men ikke et for $K < 0$ (antiferromagnetisme, AF).

- c Bruk argumentasjon basert på de respektive grunntilstandene til å forklare hvorfor transformasjonen i pkt.a er brukbar for ferromagnetisme, men ikke for antiferromagnetisme.

Vil situasjonen endre seg kvalitativt for F og/eller AF dersom "lederspinnene" ble plassert som i figur 2.2 (med periodisk gjentakelse av utsnittet vist)?



Figur 2.2

- d Vis at første kumulanttilnærmelse for transformasjonen med lederspinn fordelt som i figur 2.2 gir

$$K' = 2K \frac{x^2+4x+2+x^{-2}}{(x+6+x^{-1})^2} = 2K g(x)$$

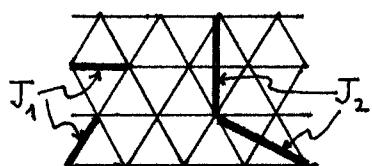
der symbolene har samme betydning som under pkt.b. Skisser $g(x)$ og diskuter resultatet kvalitativt.

Oppgave 3

Vi tar nå for oss en generalisert Isingmodell på et triangulært gitter, i 2 romdimensjoner. Hamiltonfunksjonen er

$$H = -h \sum_i s_i - J_1 \sum_{\langle ij \rangle} s_i s_j - J_2 \sum_{nnn} s_k s_\ell$$

der $s_i = \pm 1$, h er et ytre magnetfelt (målt i passende enheter), sum nr 2, med koplingskonstant J_1 , går over alle nærmeste nabopar, og sum nr. 3, med koplingskonstant J_2 , over alle nest nærmeste nabopar (se



Figur 3.1

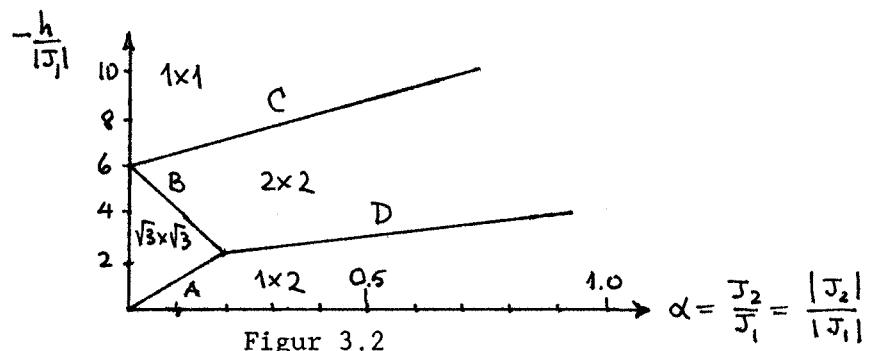
figur 3.1). Vi antar at begge koplingene er antiferromagnetiske, dvs. at $J_1 = -|J_1|$, $J_2 = -|J_2|$.

- a Bestem energien pr. spinn, som funksjon av h , J_1 og J_2 , for følgende periodiske konfigurasjoner (der pluss/minus står for $s_i = \pm 1$),

$$E_{1\times 1}: \begin{array}{c} - \\ - \\ - \end{array} ; \quad E_{2\times 2}: \begin{array}{c} - + - - + - \\ + - + - + \end{array}$$

$$E_{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}: \begin{array}{c} + - - + - - \\ + - + - + - \\ + - + - + - \end{array} ; \quad E_{1\times 2}: \begin{array}{c} - + - - + - \\ + + + + \end{array}$$

- b Vis at resultatet under pkt. a er i samsvar med følgende diagram som viser områdene der de forskjellige grunntilstandene er stabile.



Figur 3.2

- c Langs linjen D i figur 3.2 er $E_{1\times 2} = E_{2\times 2}$. Beregn eksitasjonsenergien som kreves for å innføre ett uordnet spinn (dvs. ett spinn som peker "gal" veg) i konfigurasjonen 1×2 eller 2×2 langs linjen D. Bruk resultatet til å vise at entropien pr. spinn ved $T=0$ minst er $s(T=0)=k_B \ln c$, der $c>1$ er en konstant (som ikke skal bestemmes!) [Alternativ formulering: Vis at en nedre skranke for antall grunntilstander, på et punkt langs linjen D, kan finnes på formen c^N , der N er det totale (makroskopiske) antall spinn i systemet.]
- d Anta nå at $J_2/J_1=\alpha=0,5$. Hvilke av følgende fasediagram er konsistent med det du vet? Heltrukken linje: Første ordens faseovergang. Stripet linje: Kontinuerlig faseovergang. Gi korte begrunnelser for svarene.

