Eksamen i Transportteori 2

Transport i nanostrukturer

20.5.94

Løsningsforslag

Oppgave 1

a Konstant $\vec{B} = B\hat{z}$ gir $B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = -\frac{\partial A_x}{\partial y} \Rightarrow A_x = -By$

Med magnetfelt: $\vec{p} \to \vec{p} - q\vec{A}$ slik at Sch.l. blir

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\left\{ \left(\frac{\partial}{\partial x} - \frac{ie}{\hbar}By \right)^2 + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right\} + V(y) \right] e^{ikx}\phi_k(y) = \varepsilon_k e^{ikx}\phi_k(y)$$

Med e^{ikx} som eneste x-avhengige ledd er $\frac{\partial}{\partial x} \to ik$

og

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\hbar^2}{2m}\left(k - \frac{eB}{\hbar}y\right)^2 + V(y) \right] \phi_k(y) = \varepsilon_k \phi_k(y)$$

Def: $l_B^2 = \frac{\hbar}{eB}$, og $\frac{\hbar^2}{2m}\frac{e^2B^2}{\hbar^2} = \frac{1}{2}m\omega_c^2$ der $\omega_c = \frac{eB}{m}$.

Altså, Sch.l.:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{1}{2}m\omega_c^2\left(y - kl_B^2\right)^2 + V(y) \right] \phi_k(y) = \varepsilon_k \phi_k(y)$$

b $V = 0$. Med $\eta = y - kl_B^2$:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial \eta^2} + \frac{1}{2}m\omega_c^2\eta^2 \right] \phi_k(\eta) = \varepsilon_k \phi_k(\eta)$$

Harmonisk oscillatorlikning, uten k-avhengighet.

Spektrum:

$$\varepsilon_{k,n} = \hbar\omega_c\left(n + \tfrac{1}{2}\right) \quad ; \quad n = 0, 1, \ldots \text{ Landaunivå}$$

$$\frac{\partial \varepsilon_{k,n}}{\partial k} = 0 \quad \Rightarrow \quad v_n = 0, \text{ ingen transport}$$

c La oss $V(y) = V(kl_B^2) + V'(kl_B^2)(y - kl_B^2) + \cdots \equiv \frac{1}{2}m\omega_c^2(\nu_k + \nu_k'\eta)$
Sch.l.:

$$\left[-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial\eta^2} + \frac{1}{2}m\omega_c^2\underbrace{\left(\eta^2 + \nu_k + \nu_k'\eta\right)}_{(\eta+\frac{1}{2}\nu_k')^2 + \nu_k - \frac{1}{4}(\nu_k')^2}\right]\phi_k(\eta) = \varepsilon_k\phi_k(\eta)$$

Spektret igjen gitt ved harmonisk oscillator siden

$$\varepsilon_{kn} - \frac{1}{2}m\omega_c^2\left(\nu_k - \frac{1}{4}(\nu_k')^2\right) = \hbar\omega_c\left(n + \frac{1}{2}\right)$$

Her kunne vi argumentere bort $\frac{1}{4}(\nu_k')^2$ relativt ν_k, men dette blir klarere når vi går til den fysiske størrelsen, gruppehastigheten

$$v_n = \frac{1}{\hbar}\frac{\partial\varepsilon_{k,n}}{\partial k} = \frac{1}{\hbar}\frac{1}{2}m\omega_c^2\left[\frac{\partial\nu_k}{\partial k} - \frac{1}{2}\nu_k'\frac{\partial\nu_k'}{\partial k}\right]$$

Tilbake til $\nu_k \cdot \frac{1}{2}m\omega_c^2 = V(kl_B^2)$, $\nu_k' \cdot \frac{1}{2}m\omega_c^2 = V'(kl_B^2)$

$$v_n = \frac{1}{\hbar}\left[\frac{\partial}{\partial k}V(kl_B^2) - \frac{1}{2}V'(kl_B^2)\cdot\frac{1}{\frac{1}{2}m\omega_c^2}\frac{\partial}{\partial k}V'(kl_B^2)\right]$$

$$= \frac{1}{\hbar}\left[l_B^2 V'(kl_B^2) - \frac{l_B^2}{m\omega_c^2}V'(kl_B^2)V''(kl_B^2)\right]$$

Forholdet mellom andre og første ledd er

$$\frac{V''(kl_B^2)}{m\omega_c^2} = \frac{V''}{m\frac{e^2B^2}{m^2}} = V''\cdot l_B^2\cdot\frac{eB}{\hbar}\cdot\frac{m}{e^2B^2} = \frac{V''l_B^2}{\hbar\omega_c} \ll 1$$

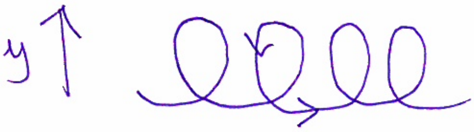
Vi dropper derfor andre ledd og finner

$$v_n = \frac{1}{\hbar}\frac{\hbar}{eB}\cdot e\left(-\frac{\partial\phi_{el.stat}}{\partial y}\right) = \frac{E}{B}$$

der $E = E_y = -\frac{\partial\phi_{el.stat}}{\partial y} = -\frac{\partial V/(-e)}{\partial y}$ er det elektriske feltet. Altså

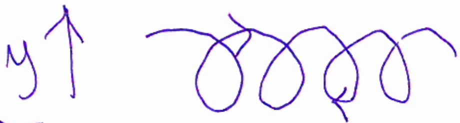
$$v_n = \frac{E}{B} \qquad v_n \parallel x \quad E \parallel y \quad B \parallel z \iff \vec{v} = \frac{\vec{E}\times\vec{B}}{B^2}$$

d Med positivt B-felt og $\partial B/\partial y > 0$ vil elektronene rotere mot klokka, og krumningsradien vil være <u>mindre</u> (sentripetalakselerasjonen større) ved øvre vendepunkt enn ved nedre. Resultat:



$\Longrightarrow v_x > 0$

Med negativt B-felt vil elektronene rotere <u>med</u> klokka. Når stadig $\partial B/\partial y > 0$, vil krumningsradien nå være <u>minst</u> øverst. Altså



$\Longrightarrow v_x > 0$

[Dersom banens midtpunkt tilfeldigvis er der B's fortegn skifter, $B = B_0 + B_1\langle y\rangle = 0$, har en

$\Longrightarrow v_x < 0$

men dette unntaket er åpenbart ikke dekket av den oppgitte formel.]

e

$$E_{drift} = \frac{1}{2} m \frac{E^2}{B^2} = \frac{1}{100}\hbar\omega_c \Rightarrow E^2 \approx \frac{1}{50}\cdot\frac{\hbar e}{m^2} B^3$$

$$E^2 \sim \frac{1}{50}\cdot\frac{1.05\cdot 10^{-34}\cdot 1.6\cdot 10^{-19}}{\left(\frac{2}{3}\cdot 10^{-1}\right)^2\cdot 9.1^2\cdot 10^{-62}}\cdot 1^3\,\frac{V}{m} \sim 90\cdot 10^6\,\frac{V}{m}$$

$$E \sim 10^4\,\frac{V}{m} = 10\,\frac{mV}{\mu m}$$

Dette er feltstyrker av den størrelsesorden en finner i heterostrukturer. (Mye avhenger selvsagt av de detaljerte omstendighetene!)

Så var det det inhomogene magnetfeltet:

$$\frac{E_{drift}}{\hbar\omega_c} \sim \frac{m\frac{\hbar^2 B_1^2}{m^2 B_0^2}}{\hbar\frac{eB_0}{m}} = \frac{\frac{\hbar}{eB_0}B_1^2}{B_0^2} = \left(\frac{\ell_B B_1}{B_0}\right)^2 \sim \left(\frac{\ell_B}{1\,cm}\right)^2 \sim \left(\frac{10^{-8}}{10^{-2}}\right)^2 \sim 10^{-12}$$

Vi kan <u>glemme</u> ∇B i <u>makro</u>-felt. Men kanskje ikke mikro-generert felt i spesielle tilfeller?

Oppgave 2

a Tilstandstettheten $\rho(E) = \#$ tilst. / ~~per~~ vol.enhet $\times$ energiintv.
Ved $T=0$ er # partikler pr. flateenhet (i 2D):

$$n = \int_0^{E_F} dE\, \rho(E) = g_s g_v \frac{m}{2\pi\hbar^2} E_F$$

GaAs $g_v = 1$, $g_s = 2$ $\Rightarrow$ $n = 4\pi \frac{m}{h^2} E_F$, der
m er den effektive massen.

b Én spinn-degenert åpen kanal gir konduktans

$$G_H = \frac{2e^2}{h} \Rightarrow R_H = \underbrace{\frac{h}{e^2}}_{R_K = 25.8\,k\Omega} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{2} 25.8\,k\Omega \sim 13\,k\Omega$$

Altså: Begge spinntilstandene til laveste Landau-nivå, og bare laveste Landaunivå, bidrar med en kanttilstand som gir R_H for $B \gtrsim 3.5\,T$
Vi får samme B_c for begge prøvene fordi den magnetiske lengden er mye mindre enn prøvens bredde i begge tilfelle, altså: Kanttilstanden er uavhengig av bredden i meget god tilnærmelse. (Sjekk $l_B \sim 15\,nm \ll 0.65\,\mu m = 650\,nm$)

c Transportegenskapene avhenger av $\overbrace{\text{om}}^{(\text{ved } T\approx 0)}$ det finnes nærliggende (i energi) ledige energitilstander.
Konduktansen vil derfor oscillere med fyllingsfaktoren. Ved sterke magnetfelt er tilstandstettheten i GaAs, idealisert,

$$\rho(E) = 2\frac{eB}{h} \sum_n \delta(E - E_n)$$

Vi må regne med at resistansens oscillasjon går gjennom en periode når

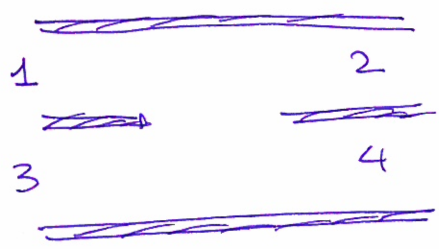
$$n \Big/ \frac{2eB}{h} \quad \text{endres med et heltall (ett LL)}$$

Altså

$$\Delta \frac{1}{B} = \frac{2e}{hn}$$

Med e & h naturkonstanter kan derfor flatetettheten n bestemmes ved perioden $\Delta\frac{1}{B}$ til SdH-oscillasjonene.

d

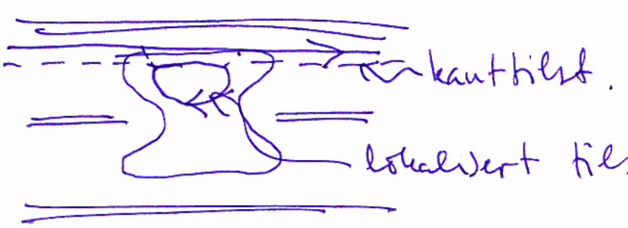


Størrelsen $R_{L1} = R_{12,34}$ måles ved at en sender en strøm fra 1 til 2, mens en måler spenningen mellom 3 og 4.

Ved $B=0$ har vi ikke kant-tilstander, og en strøm gjennom 1 vil derfor lett lekke over til 4. Til 3 kommer det bare strøm som resultat av refleksjoner. Motspenningen for å sikre at nettostrømmen i 3 ~~1~~ og 4 er null (spenningskontakter) må derfor være større i 4 enn i 3 ~~1~~, dvs motsatt rettet strømmen $1 \to 2$, dvs $R_{L1} < 0$ ved $B = 0T$.

Ved høyere felt dannes kanttilstander som propagerer langs øvre kant, koplingen til 3 ~~1~~, og spesielt 4 svekkes, og $R_{L1} \to \approx 0$.

e



Akkurat i det kant-tilstand nr. 2 --- gir opp, kopler den sterkt til den lokaliserte tilstanden i halve vinduet (åsrygg langs midten!)
Dette skulle gi Aharonov-Bohm oscillasjoner som svarer til $\Delta B \cdot S_{eff} = h/e$, der S_{eff} er det effektive arealet. $S_{eff} \approx \frac{1}{2} S_{liten} \approx \frac{1}{2}\frac{1}{4} S_{stor} \approx \frac{1}{8} \cdot 0.9 (\mu m)^2$
↑ i artikkel

$$\Delta B \sim \frac{6.6 \cdot 10^{-34}}{1.6 \cdot 10^{-19}} \frac{8}{0.9 \cdot 10^{-12}} T \sim 37 mT.$$

Ganske bra overensstemmelse!