

UNIVERSITETET I TRONDHEIM
NORGES TEKNISKE HØGSKOLE
INSTITUTT FOR FYSIKK

Faglig kontakt under eksamen:

Navn: Kåre Olaussen

Telefon: 3652

Eksamen i fag L.S: Anvendelse av symmetri grupper i fysikken

Onsdag 12. mai 1993

Tid: 0900–1500

Tillatte hjelpemidler: (Alternativ B): Godkjent lommekalkulator tillatt.

Rottmann, *Mathematische Formelsammlung*.

Barnett and Cronin: *Mathematical Formulae*.

Øgrim, *Størrelser og enheter i fysikken*.

Oppgave 1:

Forklar kort, gjerne i stikkords form, hva du forbinder med følgende begreper:

- a) Abelsk gruppe
- b) Syklisk gruppe
- c) Ordenen til et gruppe-element
- d) Isomorfe grupper
- e) Invariant undergruppe
- f) Konjugasjonsklasse
- g) En representasjon av en gruppe
- h) En irreducibel representasjon av en gruppe
- i) Schur's to lemma
- j) Det store ortogonalitets-teoremet
- k) Karakteren til en representasjon
- l) Den regulære representasjonen (til en endelig gruppe)
- m) Irreducibel tensor operator
- n) Wigner–Eckart teoremet
- o) Symmorfe og ikke-symmorfe romgrupper
- p) Bølgevektor gruppe (the group of the wavevector \vec{k})
- q) Kramers degenerasjon

Oppgave 2:

Se på en rettvinklet boks der to av sidekantene har samme lengde ($a = b \neq c$):

- a) Finn alle symmetrielementene (covering operations) for dette geometriske objektet.
 - b) Hva er standard betegnelse for denne symmetrigruppen (i enten Schönflies eller internasjonal notasjon)?
 - c) Foreta en oppdeling av denne symmetrigruppen (G) i konjugasjonsklasser .
 - d) Hvor mange inekvivalente irreducible representasjoner har denne gruppen?
 - e) Av hvilke dimensjoner må disse representasjonene være?
 - f) Bestem karakterene til alle irreducible representasjoner av denne gruppen.
- Tips:** Merk at gruppen kan skrives som et direkte produkt, $G = \{E, I\} \times H$.
- g) Karakterene til en positiv paritet irreducible representasjon L^+ av $O(3) = \{E, I\} \times SO(3)$ avhenger bare av rotasjonsvinkelen θ ,

$$\chi^{(L)}(\theta) = \frac{\sin \left[\left(L + \frac{1}{2} \right) \theta \right]}{\sin \left(\frac{1}{2} \theta \right)}.$$

Hva blir karakterene for de tilsvarende irreducible representasjoner med negativ paritet, L^- ?

(Positiv og negativ paritet vil si at I er representert ved h.h.vis $+1$ og -1 .)

- h) Skriv ned karakteren for 2^+ -representasjonen restrikkert til symmetrigruppen G (for den rettvinklede boksen) over.
- i) Hvordan dekomponerer 2^+ representasjonen for $O(3)$ i irreducible representasjoner for G når symmetrien reduseres?
- j) Hvordan vil $L = 2$ -tilstandene til et atom splitte opp når det blir utsatt for en perturbasjon med punktgruppe symmetri G ?

Oppgave 3:

Se på en (generell) representasjon $\mathcal{D}(g)$ av en (generell) gruppe G , og la H være alle elementer i G som avbildes på enhetsmatrisen,

$$H = \{h \in G \mid \mathcal{D}(h) = 1\}.$$

- a) Vis at H er en undergruppe av G .
(Ikke nødvendigvis en ekte undergruppe, dvs. at tilfellene $H = G$ eller $H = \{E\}$ ikke er utelukket.)
- b) Vis at H er en invariant undergruppe av G .