FAG 74984 SYMMETRI I FYSIKKEN

LØSNINGSFORSLAG TIL EKSAMEN 10.12.1993

Oppgave 1.

a)

Karaktertabellen til C_i:

	$\{E\}$	$\{I\}$
A_g	1	1
A_u	1	-1

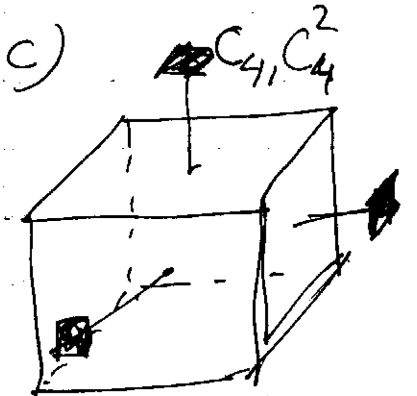
b) Vi har generelt for direkte produkt grupper $G = H \times K$ at $\chi_G^{(\alpha\times\beta)}(g) = \chi_H^{(\alpha)}(h)\chi_K^{(\beta)}(k)$, der $g = hk$.

Her:

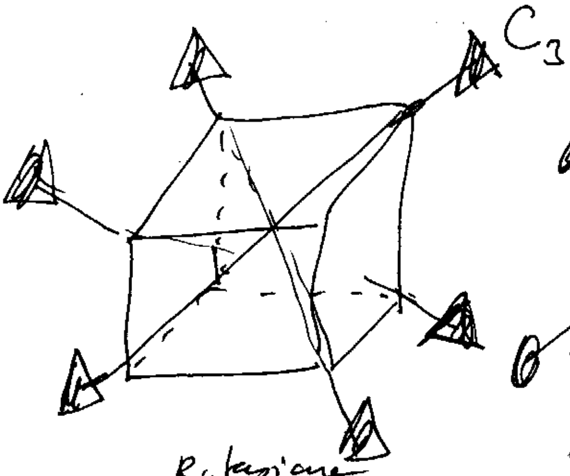
	$\{E\}$, $\{6C_4\}$ ...	$\{I\}$, $\{6IC_4\}$ ...
A_{1u}, A_{2u}, ...	χ	χ
A_{1g}, A_{2g}, ...	χ	$-\chi$

der χ er karaktertabellen for O.

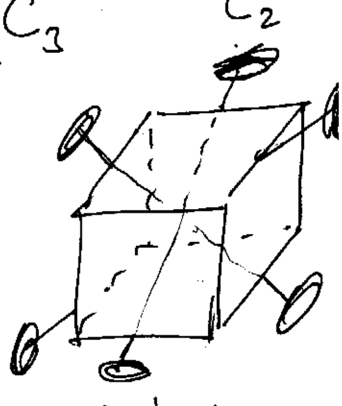
c)



Rotasjoner med $\pm\frac{\pi}{2}$ og π om aksen gjennom sideflatene



Rotasjoner med $\pm\frac{2\pi}{3}$ om diagonaler



Rotasjoner med π og aksen gjennom motstående sidekanter

d) Antall irreps n_R = Antall konjugasjonsklasser $n_R = 5$.

$$\sum_{i=1}^{n_R} d_i^2 = |G| = 24$$

Vi ordner settet $\{d_i\}$ slik at $d_1 \geq d_2 \geq \cdots \geq d_5$. Siden alle d_i er positive heltall finner vi ved systematisk prøving og feiling at

$$\underline{d_1 = d_2 = 3,\ d_3 = 2,\ d_4 = d_5 = 1}$$

(Vi kan maksimalt ha $d_1 = 4$. Antar vi dette må vi ha $d_2^2 + d_3^2 + d_4^2 + d_5^2 = 8$, men dette går ikke fordi $2^2 + 2^2 + 1^2 + 1^2$ blir for meget og $2^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$ for ~~lite~~. Vi kan heller ikke ha $d_1 = 2$, fordi $5 \cdot 2^2 < 24$. Altså må $d_1 = 3$, som raskt fører til løsningen over.)

e) Vi har ortogonalitetsrelasjonene

$$\sum_{g \in G} \chi^{(\alpha)}(g)^* \chi^{(\beta)}(g) = |G| \delta^{\alpha\beta}$$

eller

$$\sum_{i=1}^{n_C} |C_i| \chi^{(\alpha)}(C_i)^* \chi^{(\beta)}(C_i) = |G| \delta^{\alpha\beta}$$

og komplettheltsrelasjonen

$$\sum_{\alpha=1}^{n_R} |C_i| \chi^{(\alpha)}(C_i)^* \chi^{(\alpha)}(C_j) = |G| \delta_{ij}.$$

(Dvs. at vektorene $v_i^{(\alpha)} = \sqrt{|C_i|/|G|}\, \chi^{(\alpha)}(C_i)$ er ett komplett ortonormert basis på rommet av konjugasjonsklasser)

f) Siden g og g^{-1} alltid ligger i samme konjugasjonsklasse for denne gruppen, må karakterene være reelle. Siden $\chi(g^n) = \chi(g)^n = 1$ når $g^n = e$ må de alle være ± 1. Da må $\chi(C_3) = 1$ og $\chi(C_4^2) = \chi(C_4)^2 = 1$.

For A_1-representasjonen har vi generelt at $\chi(g) = 1$ for alle g.

For at A_2-representasjon skal ~~[illegible]~~ bli ortogonal på må

$$6\chi^{(A_2)}(C_4) + 6\chi^{(A_1)}(C_2') = -12$$

som bare er mulig dersom $\chi^{(A_2)}(C_4) = \chi(C_2') = -1$.

g) ~~[illegible]~~ Hvis vi nå forsøker å konstruere karakteren til den 2-dimensjonale representasjonen, kan vi starte med informasjonen

	$\{E\}$	$\{6C_4\}$	$\{3C_4^2\}$	$\{6C_2'\}$	$\{8C_3\}$
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	-1	1	-1	1
Γ	2	a	b	c	d

Vi har orthormalitetsrelasjonene

$$2 + 6a + 3b + 6c + 8d = 0$$
$$2 - 6a + 3b - 6c + 8d = 0$$

Ved ~~subtraksjon~~ finner vi at $a + c = 0$.

Ved addisjon finner vi at

$$2 + 3b + 8d = 0 \quad \text{eller} \quad b = -\tfrac{1}{3}(8d + 2).$$

For at c skal bli heltallig må $8d+2$ være et multiplum av 3, dvs. $\underline{d = -1 + 3k}$ og $\underline{b = 2 - 8k}$.

Normeringsbetingelsen blir nå at

$$4 + 12a^2 + 3(2-8k)^2 + 8(1-3k)^2 = 24$$

eller

$$12a^2 + 264k^2 - 168k = 0$$

med $a = k = 0$ som eneste mulige heltallige løsning.

Altså: $\underline{a = c = 0,\ b = 2,\ d = -1}$.

h) For å konstruere karakterene til de 3-dimensjonale representasjonene kan vi starte med informasjonen

	$\{E\}$	$\{6C_4\}$	$\{3C_4^2\}$	$\{6C_2'\}$	$\{8C_3\}$
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	-1	1	-1	1
T	2	0	2	0	-1
E	3	a	b	c	d

Vi har orthonormalitetsrelasjonene

$$3 + 6a + 3b + 6c + 8d = 0$$
$$3 - 6a + 3b - 6c + 8d = 0$$

dvs.

$$a + c = 0 \quad \text{og}$$
$$6 + 6b + 16d = 0$$

Dessuten

$$6 + 6b - 8d = 0$$

~~Dette betyr Dvs.~~

med løsning $d = 0$ og $b = -1$.

Normering gir nå

$$9 + 12a^2 + 3 = 24$$

med løsningen $a = 1 \Rightarrow c = -1$ eller $a = -1 \Rightarrow c = 1$.

Dette gir de to mulige E-karakterene.

Den fullstendige karaktertabellen blir altså

	$\{E\}$	$\{6C_4\}$	$\{3C_4^2\}$	$\{6C_2'\}$	$\{8C_3\}$
A_1	1	1	1	1	1
A_2	1	−1	1	−1	1
$\mathbb{T}$	2	0	2	0	−1
E_1	3	1	−1	−1	0
E_2	3	−1	−1	1	0

Oppgave 2.

a) Hvert (n,ℓ)-nivå har degenerasjonsgrad (i) $(2\ell+1)$ dersom vi ser bort fra elektronets spinn, og (ii) $2(2\ell+1)$ dersom vi tar hensyn til elektronets spinn.

b) En irredusibel tensoroperator $\mathbb{T}^{(\alpha)}$ (med hensyn til en gitt gruppe G) er et sett operatorer $\{T_q^{(\alpha)}\}$ som transformerer slik at

$$U(g)\,T_q^{(\alpha)}\,U(g)^{-1} = \sum_{q'} T_{q'}^{(\alpha)}\,\mathcal{D}_{q'q}^{(\alpha)}(g),$$

der $\mathcal{D}^{(\alpha)}$ er en irredusibel representasjon for G.

c) $\vec{r}$, $\vec{p}$, $\vec{L}$ og $\vec{X} = \vec{r} + \vec{p}$ transformerer irredusibelt.
$\vec{Y} = \vec{r} + \vec{L}$ og $Z^{ij} = r^i r^j$ transformerer <u>ikke</u> irredusibelt.

d) $\vec{r}$, $\vec{p}$ og $\vec{X}$ transformerer som 1^--reps.
$\vec{L}$ transformerer som en 1^+-rep.
$\vec{Y}$ transformerer som en sum av 1^- $(\vec{r})$ og 1^+ $(\vec{L})$-representasjonene.
Z^{ij} transformerer som en sum av $2^+ (r^i r^j - \frac{1}{3}\delta^{ij} r^2)$- og 0^+ $(\frac{1}{3}\delta^{ij} r^2)$-reps.

e) Hvis $\mathbb{T}^{(k)}$ er en irredusibel tensoroperator som transformerer som $\mathcal{D}^{(k)}$ og $\{|\alpha j m\rangle\}$ resp. $\{|\beta \ell n\rangle\}$ er basisvektorer for irreps $\mathcal{D}^{(j)}$ resp. $\mathcal{D}^{(\ell)}$, så sier Wigner-Eckart teoremet at

$$\langle \alpha j m | T^{(k)}_q | \beta \ell n \rangle =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2j+1}} \underbrace{\langle \alpha j \| T^{(k)} \| \beta \ell \rangle}_{\substack{\text{Redusert matrise-}\\ \text{element, som avhenger}\\ \text{av dynamiske detaljer}}} \underbrace{\langle j m | \ell n k q \rangle}_{\substack{\text{Clebsch-Gordan}\\ \text{koeffisient, gruppe-}\\ \text{teoretisk bestemt.}}}$$

(I dette uttrykket er det valgt notasjon som for rotasjonsgruppen, men teoremet har en analog form også for andre grupper).

f) Siden z er en komponent av en spinn-1 tensoroperator blir

$$\mathcal{M} \propto \langle \ell' m' | \ell m 1 q \rangle$$

(med $q = 0$, men det er ikke nødvendig å vite for denne oppgaven)

Denne Clebsch-Gordan koeffisienten må være forskjellig fra null for at overgangen skal være mulig, dvs. at spinn ℓ og spinn 1 må kunne kobles til spinn ℓ', dvs.

$$\ell' = \ell-1, \ell, \ell+1 \qquad \text{dersom } \ell > 0$$

$$\ell' = 1 \qquad \text{dersom } \ell = 0$$

[Hvis vi også tar hensyn til pariteten av nivåene vil ikke $\ell' = \ell$ være mulig.]

g) Hvis skriver det nye leddet som en sum av irredusible tensorer:

$$(\partial_j E^i)(r^i r^j) = (\partial_j E^i)\left(r^i r^j - \frac{1}{3}\delta^{ij} r^2\right) + (\partial_j E^i)\frac{1}{3}\delta^{ij} r^2$$

Men

$$\partial_j E^i \delta^{ij} = \partial_i E^i = 0,$$

så dette leddet er allerede (en komponent av) en irredusibel spinn-2 tensoroperator.
Vi får et nytt bidrag til overgangamplituden

$$\mathcal{M}' \propto \langle l' m' | l\, m\, 2\, q \rangle,$$

(der vi igjen ikke trenger å bekymre oss om hva q ~~er~~.)
Skal denne Clebsch-Gordan koeffisienten være forskjellig fra null må man kunne koble spinn l og spinn 2 til spinn l', dvs

$$l' = l-2, l-1, l, l+1, l+2 \quad \text{dersom } l>1$$
$$l' = l-1, l, l+1, l+2 \quad \text{dersom } l=1$$
$$l' = 2 \quad \text{dersom } l=0$$

[Dersom vi også tar hensyn til pariteten av nivåene vil ikke

$$l' = l-1, l+1$$

være mulig for $\mathcal{M}'$.
De nye mulige overgangene er altså

$$l \to l-2, l, l+2 \quad \text{for } l>1$$
$$1 \to 1, 3$$
$$0 \to 2 \;.\;]$$

h) Ett nivå (n,l) med spinn $s=1/2$ transformerer som $\mathcal{D}^{(l)}\otimes\mathcal{D}^{(1/2)} = \mathcal{D}^{(l+\frac{1}{2})}\oplus\mathcal{D}^{(l-1/2)}$ under rotasjonsgruppen (hvis $l>0$, som $\mathcal{D}^{(1/2)}$ hvis $l=0$). Vi kan derfor forvente at hver (n,l)-nivå splitter i dubletter dersom $l>0$, men forblir usplittet dersom $l=0$.

i) Vi vil kombinere vektorene $Y_{lm}(\hat{r})\chi_s$ til irredusible ~~...~~ basisvektorer $\Omega^{(\pm)}_{jj_z}$.

$$\Omega^{(\pm)}_{jj_z} = \sum_{ms} Y_{lm}(\hat{r})\chi_s \langle l\, m\, \tfrac{1}{2}\, s \,|\, j\, j_z\rangle.$$

$j=l+\frac{1}{2}$:

$$\underline{\underline{\Omega^{(+)}_{jj_z}}} = Y_{j-1/2,\,j_z-1/2}\,\chi_{1/2}\,\overbrace{\langle j-\tfrac{1}{2}\; j_z-\tfrac{1}{2}\;\tfrac{1}{2}\;\tfrac{1}{2}\,|\,j\,j_z\rangle}^{\sqrt{\frac{j+j_z}{2j}}}$$
$$+\,Y_{j-1/2,\,j_z+1/2}\,\chi_{-1/2}\,\underbrace{\langle j-\tfrac{1}{2}\; j_z+\tfrac{1}{2}\;\tfrac{1}{2}\;-\tfrac{1}{2}\,|\,j\,j_z\rangle}_{\sqrt{\frac{j-j_z}{2j}}}$$

$$= \begin{pmatrix} \sqrt{\frac{j+j_z}{2j}}\, Y_{j-1/2,\,j_z-1/2}(\hat{r}) \\ \sqrt{\frac{j-j_z}{2j}}\, Y_{j-1/2,\,j_z+1/2}(\hat{r}) \end{pmatrix} \qquad l=0,1,2,\ldots$$

$j=l-1/2$:

$$\Omega^{(-)}_{jj_z} = \begin{pmatrix} -\sqrt{\frac{j-j_z+1}{2j+2}}\, Y_{j+1/2,\,j_z-1/2}(\hat{r}) \\ \sqrt{\frac{j+j_z+1}{2j+2}}\, Y_{j+1/2,\,j_z+1/2}(\hat{r}) \end{pmatrix} \qquad l=1,2,\ldots$$

j) Utgår fra bedømming. Oppgaven viste seg å være for villedende og ~~uf~~ufullstendig framstilt. (Man kan gjøre en vurdering av hvor stort arbeid kandiaten har nedlagt på dette punktet for eventuell justering av ~~[illegible]~~ sluttkarakteren)

k) Matrise-elementet for $2S_{1/2} \to 1S_{1/2}$ -overgangen har formen

$$\mathcal{M} \sim \chi_\alpha^* \vec{\sigma} \chi_\beta \langle \overset{n\,l\,m}{200} | \vec{B}(\vec{r},t) | \overset{n\,l\,m}{100} \rangle$$

- Approksimasjonen $B^i(\vec{r},t) \simeq B^i(0,t)$ fører til at

Delvis kredit til de som overser dette poenget, siden det ligger litt utenfor gruppeteoretisk analyse

$$\mathcal{M} \sim B^i(0,t) \underbrace{\langle 200|100 \rangle}_{=0 \text{ ved orthoganalitet}} \chi_\alpha^* \sigma^i \chi_\beta$$

- Approksimasjonen $B^i(\vec{r},t) \simeq B^i(0,t) + (\partial_j B^i)(0,t) r^j$ fører til at

$$\mathcal{M} \sim (\partial_j B^i)(0,t) \underbrace{\langle 200|r^j|100 \rangle}_{\sim \langle 00|001\alpha \rangle = 0 \text{ ved Wigner-Eckart thm.}} \chi_\alpha^* \sigma^i \chi_\beta$$

- Approksimasjonen $B^i(\vec{r},t) \simeq B^i(0,t) + (\partial_j B^i) r^j + \frac{1}{2}(\partial_j \partial_k B^i)(r^j r^k) + \ldots$

Siden $r^j r^k = \underbrace{\frac{1}{3}\delta^{jk} r^2}_{0^+\text{-operator}} + \underbrace{(r^j r^k - \frac{1}{3}\delta^{jk} r^2)}_{2^+\text{-operator}} + \ldots$

finner vi at

$\mathcal{M} \sim \langle 200|r^2|100 \rangle$ som ikke forventes å forsvinne.

l) Et system med et odde antall spinn-$\frac{1}{2}$ partikler og tidsreversjons-invarians vil alltid ha degenerasjonsgrader som er et like tall. Dette kalles Kramers degenerasjon.

m) Et vanlig hydrogenatom har et like antall spinn-$\frac{1}{2}$ partikler, så vi forventer ikke noe spesielt med spekteret. Spesielt vil man vente at grunntilstanden blir en singlett. Deuteriumatomet har et odde antall spinn-1/2 partikler, så vi forventer å se Kramers degenerasjon i spekteret, spesielt at laveste nivå er en dublett.

Spesielt venter vi at $S_{1/2}$-tilstanden hyperfinsplitter til en $J=0$ og en $J=1$ -tilstand i hydrogenatomet, og en $J=1/2$ og en $J=3/2$-tilstand i deuteriumatomet. De siste har like degenerasjonsgrader i overensstemmelse med Kramers teorem.