Løsningsforslag: Eksamen TFY4160 Bølgefysikk 8/12 - 2004

Oppgave 1

a) Newtons 2. lov gir

$$ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = F$$

hvor F for tilstrekkelig små utsving er gitt ved Hooks lov, hvilket gir at

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx \qquad (1a)$$

eller

$$\frac{d^2x}{dt} + \omega_0^2 x = 0 \qquad (1b)$$

med

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad (2)$$

Q.E.D.

b) Forskyvningen av likevekts posisjonen fra $x=0$ til $x=x_0$ er gitt ved

$$kx_0 = F_g = mg$$

som gir:

$$\underline{\underline{k = mg/x_0}} \qquad (3)$$

c) Fra lign. (8) og (9) i vedlagt formelsamling har vi generell løsning for lign. (1):

$$x = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \qquad (4)$$

Konstantene A og φ kan da bestemmes ved hjelp av initialbetingelsene:

$$x(0) = x_0 \qquad (5a)$$

$$\frac{dx(0)}{dt} = 0 \qquad (5b)$$

(4), (5a) og (5b) gir

$$X_0 = A\cos\varphi \tag{6a}$$

$$0 = -\omega_0 A \sin\varphi \tag{6b}$$

~~Likningssettet~~ (6a) & (6b) gir ved løsning for A og φ:

$$A = X_0 \quad \text{og} \quad \varphi = 0$$

som innsatt i (4) gir posisjonen X s.f.a. t.
Bruker vi (2) og (3) kan X uttrykkes ved

$$\underline{\underline{X = X_0 \cos(\omega_0 t) = X_0 \cos\left(\sqrt{\frac{g}{X_0}}\, t\right)}} \tag{7}$$

Passering av likevektsposisjonen $X = 0$ finner sted for $\cos\left(\sqrt{\frac{g}{X_0}}\, t\right) = 0$ $\Rightarrow$ $\sqrt{\frac{g}{X_0}}\, t = n\frac{\pi}{2}$, $n = 1, 3, 5 \ldots$

Altså:

$$t = n\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{X_0}{g}}, \quad n = 1, 3, 5 \ldots$$

Med oppgitte tallverdier:

$$\underline{\underline{t = n\cdot\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{0.010}{9.8}}\ \text{s} \cong n\cdot 0.05\ \text{s}, \quad n = 1, 3, 5 \ldots}}$$

eller

$$\underline{\underline{t = \left(n+\tfrac{1}{2}\right)\cdot 0.10\ \text{s}, \quad n = 0, 1, 2, 3 \ldots}}$$

d) Vi setter opp Newtons 2. lov analogt med hva vi gjorde i pkt a)

$$ma = m\frac{d^2x}{dt^2} = F = -kx + mg \qquad (8)$$

Istedetfor variabelen x innfører vi nå den nye variabelen $x' = x - x_0$ som angir utsvinget omkring likevektsposisjonen x_0 (som ble funnet i pkt b). Innsatt i (8) får vi

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = -k(x' + x_0) + mg$$

som v.h.a (3) kan uttrykkes

$$m\frac{d^2x'}{dt^2} = -kx' - k\frac{mg}{k} + mg = -kx' \qquad (9)$$

som er samme likning som (1a) og derfor har løsning

$$x' = A\cos(\omega_0 t + \varphi) \qquad (10)$$

med $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{g}{x_0}}$ som før (jfr. (2) og (3))

Setter vi inn $x' = x - x_0$ får vi

$$x = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{x_0}}\,t + \varphi\right) + x_0 \qquad (11)$$

Vi ser at oscillatoren svinger akkurat likt om likevekts posisjonen i vertikal retning som den gjorde i horisontal retning, men likevekts posisjonen er altså forandret fra $x = 0$ til $x = x_0$.

Oppgave 2

a) Skal vandrebølgen

$$D(x,t) = D_0 \cos(kx - \omega t + \varphi) \qquad (1)$$

med vilkårlig frekvens $\nu = \omega / 2\pi$ oppfylle bølgeligningen:

$$\frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial x^2} = K \, \frac{\partial^2 D(x,t)}{\partial t^2} \qquad (2)$$

der K er en konstant, må vi ha:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[D_0 \cos(kx - \omega t + \varphi)\right] = K \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left[D_0 \cos(kx - \omega t + \varphi)\right]$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[-D_0 k \sin(kx - \omega t + \varphi)\right] = K \frac{\partial}{\partial t}\left[D_0 \omega \sin(kx - \omega t + \varphi)\right]$$

$$-D_0 k^2 \cos(kx - \omega t + \varphi) = -K D_0 \omega^2 \cos(kx - \omega t + \varphi) \qquad (3)$$

Dersom (3) skal være oppfylt for alle x og t må vi ha at:

$$\omega^2 = \frac{1}{K} \cdot k^2$$

Dette impliserer at:

$$\underline{\underline{\omega = \sqrt{\frac{1}{K}} \cdot k = \text{Konstant} \cdot k}} \qquad \text{Q.E.D.}$$

b) Fra definisjonen av fasehastighet følger:

$$\omega = v_f \cdot k \tag{4}$$

For bølger med fasehastighet:

$$v_f = \left(\frac{g\lambda}{2\pi}\right)^{1/2} = \left(\frac{g}{k}\right)^{1/2} \tag{5}$$

får vi ved innsetting av (5) i (4):

$$\omega = \left(\frac{g}{k}\right)^{1/2} \cdot k \neq \text{konstant} \cdot k \tag{6}$$

Resultatet (6) sammenholdt med pkt a) i oppgaven forteller oss at bølger som har slik bølgelengde-avhengig fasehastighet som i (5) <u>ikke</u> kan oppfylle bølgeligningen (1) i oppgaveteksten for vilkårlig frekvens ν.

c) Fra (6) har vi:

$$\omega = (gk)^{1/2} \tag{7}$$

som gir:

$$\underline{\underline{V_g}} = \frac{d\omega}{dk} = \frac{1}{2}\left(\frac{g}{k}\right)^{1/2} \overset{(5)}{=} \underline{\underline{\frac{1}{2} v_f}} \tag{8}$$

Q.E.D.

d) For bølger med $\lambda = 0.60$ m:

$$v_f = \left(\frac{g\lambda}{2\pi}\right)^{1/2} = \left(\frac{9.8\ \mathrm{m/s^2} \cdot 0.60\mathrm{m}}{2\pi}\right)^{1/2} = \underline{\underline{0.97\ \mathrm{m/s}}}$$

$$v_g = \frac{1}{2}v_f = \frac{1}{2}\left(\frac{9.8\ \mathrm{m/s^2} \cdot 0.60\mathrm{m}}{2\pi}\right)^{1/2} = \underline{\underline{0.48\ \mathrm{m/s}}}$$

e) En bølge som oppstår i bakkant av bølgepakken forplanter seg framover i bølgetoget med fasehastighet;

$$v_f = \left(\frac{g\lambda}{2\pi}\right)^{1/2} \simeq \left(\frac{g\lambda_0}{2\pi}\right)^{1/2} \qquad (9)$$

mens selve bølgetoget går med gruppehastighet (jf. pkt c)

$$v_g = \frac{1}{2}v_f \overset{(9)}{\simeq} \frac{1}{2}\left(\frac{g\lambda_0}{2\pi}\right)^{1/2} \qquad (10)$$

I et referansesystem som følger bølgepakken, vil bølgen som oppstår i bakkant av pakken bevege seg med hastighet:

$$v_f' = v_f - v_g \overset{(10)}{=} \frac{1}{2}v_f \simeq \frac{1}{2}\left(\frac{g\lambda_0}{2\pi}\right)^{1/2} \qquad (11)$$

Bølgen passerer derfor gjennom bølgepakken i løpet av tiden:

$$\Delta t \overset{(11)}{=} \frac{6\lambda_0}{\frac{1}{2}\left(\frac{g\lambda_0}{2\pi}\right)^{1/2}} = 12\left(\frac{2\pi\lambda_0}{g}\right)^{1/2} \qquad (12)$$

$$= 12\left(\frac{2\pi \cdot 0.60\ \mathrm{m}}{9.8\ \mathrm{m/s^2}}\right)^{1/2} \cong \underline{\underline{7.4\ \mathrm{s}}}$$

Bølgetoget har i løpet av tiden Δt beveget seg

$$\Delta s = v_g \cdot \Delta t \overset{(10\&12)}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{g\lambda_0}{2\pi}\right)^{1/2} \cdot 12\left(\frac{2\pi\lambda_0}{g}\right)^{1/2}$$

$$= \frac{1}{2} \cdot 12 \cdot \lambda_0 = 6\lambda_0 = 6 \cdot 0.60\,m = \underline{\underline{3.6\ m}}$$

f) Ettersom bølgetoget forplanter seg bortover i bølgerenna, vil det bre seg utover fordi de ulike k-komponentene forplanter seg med ulik gruppehastighet. For k-komponentene $k_{min} = 2{,}0\,m^{-1}$ og $k_{maks} = 19\,m^{-1}$ får vi:

$$v_{g,maks} \overset{(10)}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{g}{k_{min}}\right)^{1/2} \qquad (13)$$

$$v_{g,min} \overset{(10)}{=} \frac{1}{2}\left(\frac{g}{k_{maks}}\right)^{1/2} \qquad (14)$$

Bølgemåleren ved B en avstand $L = 30$ m fra der bølgepakken ble generert vil derfor registrere k-komponentene k_{min} og k_{maks} med tidsforskjell

$$\Delta t = \frac{l}{v_{g,min}} - \frac{l}{v_{g,maks}} \qquad (15)$$

$$\overset{(13)\&(14)}{=} \frac{2l}{\sqrt{g}}\left(\sqrt{k_{maks}} - \sqrt{k_{min}}\right) \qquad (16)$$

$$= \frac{2 \cdot 30\,m}{\sqrt{9.8\ m/s^2}}\left(\sqrt{19\,m^{-1}} - \sqrt{2{,}0\,m^{-1}}\right) = \underline{\underline{56\ s}}$$

9) k_{maks}-komponenten blir registrert av bølgemåleren B, i avstand $l = 30$ m fra der bølgetoget ble generert, etter en tid:

$$t_1 \overset{(14)}{=} \frac{l}{v_{g,min}} = 2l\left(\frac{k_{maks}}{g}\right)^{1/2} \qquad (17)$$

I løpet av tiden t_1 har k_{min}-komponenten tilbakelagt strekningen:

$$s = t_1 \cdot v_{g,maks}$$

$$\overset{(13)\&(17)}{=} 2l\left(\frac{k_{maks}}{g}\right)^{1/2} \cdot \frac{1}{2}\left(\frac{g}{k_{min}}\right)^{1/2}$$

$$= l\left(\frac{k_{maks}}{k_{min}}\right)^{1/2} = 30\,\text{m}\left(\frac{19\,\text{m}^{-1}}{2{,}0\,\text{m}^{-1}}\right)^{1/2} = \underline{92\,\text{m}}$$

Den andre bølgemåleren må altså plasseres i en avstand:

$$92\,\text{m} - 30\,\text{m} = \underline{\underline{62\,\text{m}}}$$

fra B for at den skal registrere framkant av bølgetoget samtidig med at bølgemåleren i B registrerer bakkanten av bølgetoget (slik vi har definert bølgetogets framkant og bakkant i denne oppgaven.)

Oppgave 3

a) I følge lign. (71) i formelsamlingen er intensiteten for en harmonisk elektromagnetisk bølge i vakuum

$$I = \epsilon_0 c \overline{E^2} = \frac{1}{2}\epsilon_0 c E_0^2 \qquad (1)$$

hvor E_0 er det elektriske feltamplituden. Fra lign. (4) i oppgaveteksten finner vi at feltamplituden i et punkt P på skjermen gitt ved vinkelen θ er:

$$E_{\theta_0} = 2E_0 \cos\left(\frac{kd\sin\theta}{2}\right) \qquad (2)$$

(2) innsatt i (1) gir intensiteten i punktet P som funksjon av vinkelen θ:

$$I_\theta = \frac{1}{2}\epsilon_0 c \cdot (2E_0)^2 \cos^2\left(\frac{kd\sin\theta}{2}\right)$$

$$= 2\epsilon_0 c E_0^2 \cos^2\left(\frac{kd\sin\theta}{2}\right) \qquad (3)$$

b) Vi får maksimum lysintensitet når

$$\frac{kd\sin\theta}{2} = m\pi, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$$

eller $$\sin\theta = \frac{m\lambda}{d}, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \qquad (4)$$

hvor $|m| \leq d/\lambda$

For at et lysmaksimum skal falle på skjermen, må:

$$\tan\theta \leq \frac{D/2}{L}$$

eller

$$\tan^2\theta = \frac{\sin^2\theta}{1-\sin^2\theta} \overset{(4)}{=} \frac{\left(\frac{m\lambda}{d}\right)^2}{\left(1-\left(\frac{m\lambda}{d}\right)^2\right)} \leq \left(\frac{D}{2L}\right)^2 \qquad (5)$$

Løses (5) m.h.p. heltallsindeksen m, finner vi følgende krav:

$$|m| \leq \frac{\left(\frac{d}{\lambda}\right)\left(\frac{D}{2L}\right)}{\sqrt{1+\left(D/2L\right)^2}} \qquad (6)$$

Innsetting av tallverdier gir:

$$|m| \leq \frac{\left(\frac{50{,}0\cdot 10^{-6}\,m}{5{,}00\cdot 10^{-7}\,m}\right)\cdot\left(\frac{0{,}500\,m}{2\cdot 2{,}00\,m}\right)}{\sqrt{1+\left(\frac{0{,}500\,m}{2\cdot 2{,}00\,m}\right)^2}}$$

$$|m| \leq \frac{12.5}{\sqrt{1+(0{,}125)^2}} = 12{,}4 \qquad (7)$$

Altså er $|m| = 12$ det største heltallet som oppfyller ulikheten i (6) (Denne verdien tilfredsstiller også kravet $|m| \leq d/\lambda = 100$ i likn. (4))

Lysmaksima på skjermen svarer derfor til

$$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \pm 12, \qquad (8)$$

<u>tilsammen 25 maksima</u>

c) Totalfeltet av E_1 og E_2 i (1) og (2) i oppgaveteksten blir, når vi gjør bruk av relasjon (3) og kompleks representasjon:

$$E_1 + E_2 = E_\theta = \mathrm{Re}\left\{E_0 e^{i(kr-\omega t-\varphi)} + E_0 e^{i[k(r+\Delta r)-\omega t-\varphi]}\right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{E_0\left(e^{-ik\frac{\Delta r}{2}} + e^{ik\frac{\Delta r}{2}}\right) e^{i[k(r+\frac{\Delta r}{2})-\omega t-\varphi]}\right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{E_0 \, 2\cos\left(k\frac{\Delta r}{2}\right) \cdot e^{i[k(r+\frac{\Delta r}{2})-\omega t-\varphi]}\right\}$$

$$= 2E_0 \cos\left(k\frac{\Delta r}{2}\right) \cdot \mathrm{Re}\left\{e^{i[k(r+\frac{\Delta r}{2})-\omega t-\varphi]}\right\}$$

$$= 2E_0 \cos\left(k\frac{\Delta r}{2}\right) \cdot \cos\left[k\left(r+\frac{\Delta r}{2}\right)-\omega t-\varphi\right] \qquad (9)$$

Ved figurbetraktning følger at

$$\Delta r = d \cdot \sin\theta \qquad (10)$$

(10) innsatt i (9) gir

$$\underline{E_\theta = 2E_0 \cos\left(\frac{kd\sin\theta}{2}\right)\cos\left[k\left(r+\frac{d\sin\theta}{2}\right)-\omega t-\varphi\right]}$$

Q.E.D.

d) For at vi skal kunne se klart like mange maksima som i pkt b, kreves for alle maksima på skjermen at ganglengde forskjellen Δr for lys fra de to spaltene er mindre enn koherenslengden til lyset, l_c. Ganglengde forskjellen er størst for maksima med $m = \pm 12$ (se. punkt b). Vi må da kreve at

$$l_c \gtrsim \left|\Delta r\right|_{m=\pm 12} \overset{(10)}{=} \left|d\sin\theta\right|_{m=\pm 12} \overset{(4)}{=} \left|d\,\frac{m\lambda}{d}\right|_{m=\pm 12}$$

$$= 12\lambda = 12 \cdot 5{,}00 \cdot 10^2\ \text{nm} = 6{,}00\,\mu\text{m} \approx \underline{\underline{6\,\mu\text{m}}}$$

e) Vi finner ved bruk av kompleks representasjon totalfeltet E_θ på observasjonsskjermen:

$$E_\theta = E_1 + E_2 + E_3$$

$$= \mathrm{Re}\left\{E_0 e^{i[k(r-\Delta r)-\omega t-\varphi]} + E_0 e^{i[kr-\omega t-\varphi]} + E_0 e^{i[k(r+\Delta r)-\omega t-\varphi]}\right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{E_0\left(e^{-ik\Delta r} + 1 + e^{ik\Delta r}\right) e^{i[kr-\omega t-\varphi]}\right\}$$

$$= \mathrm{Re}\left\{E_0\left(1 + 2\cos k\Delta r\right) e^{i[kr-\omega t-\varphi]}\right\}$$

$$= E_0\left(1 + 2\cos k\Delta r\right)\cos(kr-\omega t-\varphi)$$

som ved innsetting av $\Delta r = d\sin\theta$ kan skrives:

$$E_\theta = E_{\theta_0}\cos(kr - \omega t - \varphi) \tag{11}$$

med

$$E_{\theta_0} = E_0\left[1 + 2\cos(kd\sin\theta)\right] \tag{12}$$

Intensitetsfordelingen på skjermen blir da (vha. lign (71) i formelsamling):

$$\underline{\underline{I_\theta = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 c\, E_{\theta_0}^2 = \tfrac{1}{2}\epsilon_0 c\, E_0^2\left[1 + 2\cos(kd\sin\theta)\right]^2}}$$