# Eksamen FY1004 Innføring i kvantemekanikk
# Fredag 30. mai 2008
# Løsninger

1a)

$$\begin{aligned}
\langle\sigma_x\rangle &= \psi^\dagger\sigma_x\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0\,, \\
\langle\sigma_y\rangle &= \psi^\dagger\sigma_y\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = 0\,, \\
\langle\sigma_z\rangle &= \psi^\dagger\sigma_z\psi = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = 1\,.
\end{aligned}$$

Vi sier at tilstanden $\psi$ har spinn opp i $z$-retningen fordi den er en egentilstand med egenverdi $+\hbar/2$ for $z$-komponenten av spinnet, $S_z = (\hbar/2)\sigma_z$. Vi har at $\sigma_z\psi = \psi$, og derfor $S_z\psi = (\hbar/2)\psi$.

1b)

$$\begin{aligned}
\langle\sigma_x\rangle &= \psi^\dagger\sigma_x\psi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathrm{i} \\ 1 \end{pmatrix} = 0\,, \\
\langle\sigma_y\rangle &= \psi^\dagger\sigma_y\psi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & -\mathrm{i} \\ \mathrm{i} & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = 1\,, \\
\langle\sigma_z\rangle &= \psi^\dagger\sigma_z\psi = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ \mathrm{i} \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -\mathrm{i} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -\mathrm{i} \end{pmatrix} = 0\,.
\end{aligned}$$

Fordi

$$\sigma_x^{\,2} = \sigma_y^{\,2} = \sigma_z^{\,2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I\,,$$

er

$$\langle\sigma_x^2\rangle = \langle\sigma_y^2\rangle = \langle\sigma_z^2\rangle = \langle I\rangle = \psi^\dagger I\psi = \psi^\dagger\psi = 1\,.$$

Følgelig er

$$\begin{aligned}
\mathrm{var}(\sigma_x) &= \langle\sigma_x^2\rangle - \langle\sigma_x\rangle^2 = 1 - 0 = 1\,, \\
\mathrm{var}(\sigma_y) &= \langle\sigma_y^2\rangle - \langle\sigma_y\rangle^2 = 1 - 1 = 0\,, \\
\mathrm{var}(\sigma_z) &= \langle\sigma_z^2\rangle - \langle\sigma_z\rangle^2 = 1 - 0 = 1\,.
\end{aligned}$$

Den fysiske tolkningen av at $\mathrm{var}(\sigma_y) = 0$, er at vi får samme verdi hver gang vi måler $\sigma_y$. At dessuten $\langle\sigma_y\rangle = 1$, betyr at den verdien vi får hver gang vi måler $\sigma_y$, er 1. Altså er dette en tilstand som har spinn opp i $y$-retningen.

At $\mathrm{var}(\sigma_y) = 0$ i tilstanden $\psi$, er matematisk sett det samme som at $\psi$ er en egentilstand for $\sigma_y$.

1c) Egenverdiene til $\vec{L}^{\,2}$ skrives som $\ell(\ell+1)\hbar^2$, egenverdiene til $L_z$ og $S_z$ skrives som $m_\ell\hbar$ og $m_s\hbar$. Med hovedkvantetall $n = 2$ i hydrogenatomet kan vi ha:

$\ell = 0$, $m_\ell = 0$, $m_s = \pm\frac{1}{2}$ (to tilstander), eller

$\ell = 1$, $m_\ell = -1, 0, 1$, $m_s = \pm\frac{1}{2}$ (seks tilstander).

1d) Omregning som trengs:

$$C r Y_{11}(\theta,\varphi) = -C\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\, r\sin\theta(\cos\varphi + \mathrm{i}\sin\varphi) = C'(x+\mathrm{i}y)\ .$$

Der altså

$$C' = -C\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\ .$$

Tilstanden $\Phi$ som det spørres etter, skal inneholde en spinor med spinn langs $y$-aksen, som vi kan hente fra punkt 1b) ovenfor.

Tilstanden $\Psi$ med $L_z$ kvantisert til $+\hbar/2$ inneholder en faktor $x+\mathrm{i}y$. I forhold til $z$-aksen ligger $x$-aksen og $y$-aksen på samme måte som $z$-aksen og $x$-aksen ligger i forhold til $y$-aksen. Da trekker vi den slutningen at tilstanden $\Phi$ med $L_y$ kvantisert til $+\hbar/2$ må inneholde en faktor $z + \mathrm{i}x$. Bortsett fra en vilkårlig fasefaktor er tilstanden $\Phi$ dermed entydig fastlagt, vi har at

$$\Phi = \frac{C'}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix}(z+\mathrm{i}x)\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{2a}}\ .$$

Det spørres ikke i oppgaven etter å uttrykke $\Phi$ ved de sfærisk harmoniske, men vi kan jo gjøre det likevel:

$$\begin{aligned}\Phi &= -C\sqrt{\frac{3}{16\pi}}\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix} r\,(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta\cos\varphi)\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{2a}}\\ &= -C\begin{pmatrix}1\\ \mathrm{i}\end{pmatrix} r\,\mathrm{e}^{-\frac{r}{2a}}\left(\frac{1}{2}Y_{10}(\theta,\varphi) + \mathrm{i}\frac{1}{2\sqrt{2}}\left(Y_{1,-1}(\theta,\varphi) - Y_{11}(\theta,\varphi)\right)\right)\ .\end{aligned}$$

2a) Det er økonomisk å skrive $M = m_1 + m_2$. Ellers er det rett fram å kommutere.

$$\begin{aligned}[x, p_x] &= \left[x_1 - x_2\,,\ \frac{m_2 p_{1x} - m_1 p_{2x}}{M}\right]\\ &= \frac{1}{M}\left(m_2([x_1,p_{1x}] - [x_2,p_{1x}]) - m_1([x_1,p_{2x}] - [x_2,p_{2x}])\right)\\ &= \frac{1}{M}\left(m_2(\mathrm{i}\hbar - 0) - m_1(0 - \mathrm{i}\hbar)\right) = \mathrm{i}\hbar\ .\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[X, P_x] &= \left[\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}\,,\ p_{1x} + p_{2x}\right]\\ &= \frac{1}{M}\left(m_1([x_1,p_{1x}] + [x_1,p_{2x}]) + m_2([x_2,p_{1x}] + [x_2,p_{2x}])\right)\\ &= \frac{1}{M}\left(m_1(\mathrm{i}\hbar + 0) + m_2(0 + \mathrm{i}\hbar)\right) = \mathrm{i}\hbar\ .\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
[x, P_x] &= [x_1 - x_2\,,\, p_{1x} + p_{2x}] = [x_1, p_{1x}] + [x_1, p_{2x}] - [x_2, p_{1x}] - [x_2, p_{2x}] \\
&= \mathrm{i}\hbar + 0 - 0 - \mathrm{i}\hbar = 0\,.
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
[X, p_x] &= \left[\frac{m_1 x_1 + m_2 x_2}{M}\,,\, \frac{m_2 p_{1x} - m_1 p_{2x}}{M}\right] \\
&= \frac{1}{M^2}\Big(m_1 m_2\,[x_1, p_{1x}] - m_1^2\,[x_1, p_{2x}] + m_2^2\,[x_2, p_{1x}] - m_1 m_2\,[x_2, p_{2x}]\Big) \\
&= \frac{1}{M^2}\,(m_1 m_2\,\mathrm{i}\hbar - 0 + 0 - m_1 m_2\,\mathrm{i}\hbar)) = 0\,.
\end{aligned}
$$

2b) Skriv $M = m_1 + m_2$. Vi kan uttrykke $\vec{p}_1$ og $\vec{p}_2$ ved $\vec{P}$ og $\vec{p}$, det gir at

$$
\vec{p}_1 = \frac{m_1}{M}\,\vec{P} + \vec{p}\,, \qquad \vec{p}_2 = \frac{m_2}{M}\,\vec{P} - \vec{p}\,.
$$

Vi husker på at $\vec{P}$ og $\vec{p}$ kommuterer, slik at $\vec{P}\cdot\vec{p} = \vec{p}\cdot\vec{P}$. Dermed har vi at

$$
\begin{aligned}
H &= \frac{\vec{p}_1^{\,2}}{2m_1} + \frac{\vec{p}_2^{\,2}}{2m_2} + V = \frac{1}{2m_1}\left(\frac{m_1}{M}\,\vec{P} + \vec{p}\right)^2 + \frac{1}{2m_2}\left(\frac{m_2}{M}\,\vec{P} - \vec{p}\right)^2 + V \\
&= \frac{1}{2m_1}\left(\frac{m_1^2}{M^2}\,\vec{P}^{\,2} + 2\,\frac{m_1}{M}\,\vec{P}\cdot\vec{p} + \vec{p}^{\,2}\right) + \frac{1}{2m_2}\left(\frac{m_2^2}{M^2}\,\vec{P}^{\,2} - 2\,\frac{m_2}{M}\,\vec{P}\cdot\vec{p} + \vec{p}^{\,2}\right) + V \\
&= \frac{m_1 + m_2}{2M^2}\,\vec{P}^{\,2} + \left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}\right)\vec{p}^{\,2} + V = \frac{\vec{P}^{\,2}}{2M} + \frac{\vec{p}^{\,2}}{2m} + V\,.
\end{aligned}
$$

2c) Sett inn produktbølgefunksjonen $\psi(\vec{r}_1, \vec{r}_2) = \psi_{\mathrm{ms}}(\vec{R})\,\psi_{\mathrm{rel}}(\vec{r})$ i den tidsuavhengige Schrödinger-ligningen $H\psi = E\psi$, og divider hele ligningen med $\psi$. Det gir ligningen

$$
\frac{\vec{P}^{\,2}\,\psi_{\mathrm{ms}}(\vec{R})}{2M\psi_{\mathrm{ms}}(\vec{R})} + \frac{\vec{p}^{\,2}\,\psi_{\mathrm{rel}}(\vec{r})}{2m\psi_{\mathrm{rel}}(\vec{r})} + V(\vec{r}) = E\,.
$$

Energien $E$ på høyre side av likhetstegnet skal være en konstant. Venstre side avhenger av $\vec{R}$ i første ledd og av $\vec{r}$ i andre og tredje ledd. For at venstre side skal være konstant, må første ledd være lik en konstant, som vi velger å kalle $E_{\mathrm{ms}}$, og summen av andre og tredje ledd må være lik en annen konstant, som vi kaller $E_{\mathrm{rel}}$. Det gir ligningen $E = E_{\mathrm{ms}} + E_{\mathrm{rel}}$, samt de to tidsuavhengige Schrödinger-ligningene

$$
\frac{\vec{P}^{\,2}}{2M}\,\psi_{\mathrm{ms}}(\vec{R}) = E_{\mathrm{ms}}\,\psi_{\mathrm{ms}}(\vec{R})
$$

og

$$
\frac{\vec{p}^{\,2}}{2m}\,\psi_{\mathrm{rel}}(\vec{r}) + V(\vec{r})\,\psi_{\mathrm{rel}}(\vec{r}) = E_{\mathrm{rel}}\,\psi_{\mathrm{rel}}(\vec{r})\,.
$$

Ligningen for $\psi_{\mathrm{ms}}(\vec{R})$ er rett og slett ligningen for en fri partikkel, som har løsninger for enhver positiv verdi av energien $E_{\mathrm{ms}}$.

2d) Energiegenverdien $E_1$ for grunntilstanden i hydrogenatomet er relativenergien $E_{\mathrm{rel}}$, når vi bruker terminologien fra forrige punkt. Vi finner den ved å løse Schrödinger-ligningen for relativbevegelsen, der massen er den reduserte massen. Derfor er det den reduserte massen som bestemmer energien.

Med to masser $m_1$ og $m_2$ er den reduserte massen

$$m = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2} = m_1 \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} \approx m_1 \left(1 - \frac{m_1}{m_2}\right) .$$

Når $m_1$ er mye mindre enn $m_2$, er massereduksjonen liten, den relative differensen $(m_1 - m)/m_1$ er da omtrent $m_1/m_2$. For hydrogen, med $m_1 = m_\mathrm{e}$ og $m_2 = m_\mathrm{p}$, er

$$\frac{m_1}{m_2} = 0{,}000\,544\,62 \ , \qquad m = m_1 \frac{1}{1 + \frac{m_1}{m_2}} = \frac{1}{1{,}000\,544\,62}\, m_\mathrm{e} = 0{,}999\,455\,68\, m_\mathrm{e} .$$

For deuterium, med $m_1 = m_\mathrm{e}$ og $m_2 = m_\mathrm{d} \approx 2m_\mathrm{p}$, er

$$\frac{m_1}{m_2} = 0{,}000\,272\,44 \ , \qquad m = \frac{1}{1{,}000\,272\,44}\, m_\mathrm{e} = 0{,}999\,727\,63\, m_\mathrm{e} .$$

Reduksjonsfaktoren er $1/2$ når de to massene er like store, som for eksempel i positronium. Det gjør at grunntilstandsenergien er $-6{,}8$ eV i positronium, halvparten av de $-13{,}6$ eV som gjelder for hydrogen.

2e) Forholdet mellom den reduserte massen for deuterium og for hydrogen er

$$k = \frac{0{,}999\,727\,63\, m_\mathrm{e}}{0{,}999\,455\,68\, m_\mathrm{e}} = 1{,}000\,272\,10 \ .$$

Forholdet mellom energinivåene i de to atomene er $k$, forholdet mellom frekvensene til spektrallinjene er $k$, og forholdet mellom bølgelengdene er da

$$\frac{1}{k} = 0{,}999\,727\,98 \ .$$

Bølgelenden til deuterium $\alpha$-linjen er altså

$$0{,}999\,727\,98 \times 656{,}28 \text{ nm} = 656{,}10 \text{ nm} \ .$$

Forskjellen mellom linjene til hydrogen og deuterium er $2{,}7 \times 10^{-4}$. Den er bortimot 10 ganger Doppler-bredden for linjene i solspektret, og altså godt synlig, når bare spektrometeret har tilstrekkelig oppløsning.

Denne utregningen reduseres til hoderegning hvis vi sier at

$$\frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{p}} \approx \frac{1}{2000} \ , \qquad \frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{d}} \approx \frac{m_\mathrm{e}}{2m_\mathrm{p}} \approx \frac{1}{4000} \ .$$

Da er

$$k = \frac{1 + \frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{p}}}{1 + \frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{d}}} \approx \frac{1 + \frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{p}}}{1 + \frac{m_\mathrm{e}}{2m_\mathrm{p}}} \approx 1 + \frac{m_\mathrm{e}}{m_\mathrm{p}} - \frac{m_\mathrm{e}}{2m_\mathrm{p}} = 1 + \frac{m_\mathrm{e}}{2m_\mathrm{p}} \approx 1 + \frac{1}{4000} = 1{,}000\,25 \ ,$$

og

$$\frac{1}{k} \approx 1 - \frac{1}{4000} = 0{,}999\,75 \ .$$

3a) Med $\psi = \psi(x,t) = C\,\mathrm{e}^{-\alpha x^2 + \beta(t)\,x + \gamma(t)}$ har vi at

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \psi}{\partial t} &= \left(\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}\,x + \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right)\psi\,,\\
\frac{\partial \psi}{\partial x} &= (-2\alpha x + \beta)\,\psi\,,\\
\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} &= \left(-2\alpha + (-2\alpha x + \beta)^2\right)\psi = (4\alpha^2 x^2 - 4\alpha\beta x + \beta^2 - 2\alpha)\psi\,.
\end{aligned}$$

Schrödinger-ligningen ser da slik ut:

$$\mathrm{i}\hbar\left(\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t}\,x + \frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t}\right)\psi = \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\,(4\alpha^2 x^2 - 4\alpha\beta x + \beta^2 - 2\alpha) + \frac{1}{2}\,m\omega^2 x^2\right)\psi\,.$$

Vi kan dividere hele ligningen med $\psi$, og samle potensene av $x$, det gir ligningen

$$\left(\frac{2\hbar^2\alpha^2}{m} - \frac{1}{2}\,m\omega^2\right)x^2 + \left(\mathrm{i}\hbar\,\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} - \frac{2\hbar^2\alpha\beta}{m}\right)x + \mathrm{i}\hbar\,\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} + \frac{\hbar^2(\beta^2 - 2\alpha)}{2m} = 0\,.$$

For at ligningen skal være oppfylt for alle verdier av $x$, må koeffisienten for hver potens av $x$ være 0, altså

$$\frac{2\hbar^2\alpha^2}{m} - \frac{1}{2}\,m\omega^2 = 0\,,\qquad \mathrm{i}\hbar\,\frac{\mathrm{d}\beta}{\mathrm{d}t} - \frac{2\hbar^2\alpha\beta}{m} = 0\,,\qquad \mathrm{i}\hbar\,\frac{\mathrm{d}\gamma}{\mathrm{d}t} + \frac{\hbar^2(\beta^2 - 2\alpha)}{2m} = 0\,.$$

Etter noe omforming gir det de tre oppgitte ligningene.

Merk: vi må forutsette at $\alpha > 0$. For $\alpha < 0$ gir bølgefunksjonen ingen mening, fordi den divergerer for sterkt i grensene $x \to \pm\infty$.

3b) Av koeffisientene $\alpha$, $\beta$ og $\gamma$ er $\alpha$ reell, mens $\beta$ og $\gamma$ er komplekse. Da er

$$|\psi|^2 = \psi^*\psi = (C^*\mathrm{e}^{-\alpha x^2 + \beta^* x + \gamma^*})(C\,\mathrm{e}^{-\alpha x^2 + \beta x + \gamma}) = |C|^2\,\mathrm{e}^{-2\alpha x^2 + (\beta + \beta^*)\,x + \gamma + \gamma^*}\,.$$

De oppgitte formlene gir at

$$\beta + \beta^* = 2\alpha x_0\left(\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega t}\right) = 4\alpha x_0\cos(\omega t)\,,$$

$$\begin{aligned}
\gamma + \gamma^* &= -\mathrm{i}\,\frac{\omega t}{2} + \mathrm{i}\,\frac{\omega t}{2} - \frac{\alpha x_0^2}{2}\left(\mathrm{e}^{-2\mathrm{i}\omega t} + \mathrm{e}^{2\mathrm{i}\omega t}\right) = -\alpha x_0^2\cos(2\omega t)\\
&= -\alpha x_0^2\,(\cos^2(\omega t) - \sin^2(\omega t)) = -\alpha x_0^2\,(2\cos^2(\omega t) - 1)\,.
\end{aligned}$$

Når vi setter inn det, får vi at

$$|\psi|^2 = |C|^2\,\mathrm{e}^{-2\alpha(x - x_0\cos(\omega t))^2 + \alpha x_0^2}\,.$$

3c) I følge derivasjonen vi gjorde under punkt 3a) er

$$\frac{\hbar}{\mathrm{i}}\frac{\partial\psi}{\partial x} = -\mathrm{i}\hbar(-2\alpha x + \beta)\,\psi\;.$$

Det gir, i følge den oppgitte definisjonen av $\langle p\rangle$, at

$$\begin{aligned}\langle p\rangle &= -\mathrm{i}\hbar(-2\alpha\,\langle x\rangle + \beta) = -\mathrm{i}\hbar(-2\alpha x_0\cos(\omega t) + 2\alpha x_0\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\omega t})\\ &= -\mathrm{i}\hbar(-2\mathrm{i}\alpha x_0\sin(\omega t)) = -2\hbar\alpha x_0\sin(\omega t) = -m\omega\,x_0\sin(\omega t)\;.\end{aligned}$$

For å beregne $\langle p^2\rangle$ viser vi også til derivasjonen under punkt 3a). Vi har at

$$\begin{aligned}\langle p^2\rangle &= \int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\;\psi^*\,(-\hbar^2)\,\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} = -\hbar^2\int_{-\infty}^{\infty}\mathrm{d}x\;\psi^*\,(4\alpha^2\,x^2 - 4\alpha\beta x + \beta^2 - 2\alpha)\,\psi\\ &= -\hbar^2(4\alpha^2\,\langle x^2\rangle - 4\alpha\beta\,\langle x\rangle + \beta^2 - 2\alpha)\;.\end{aligned}$$

Det fører fram å gå direkte løs på dette uttrykket, men vi kan spare arbeid ved å omforme litt, og så bruke oppgitte resultater, foruten det resultatet vi nettopp regnet ut. Vi har at

$$\begin{aligned}\langle p^2\rangle &= -\hbar^2(4\alpha^2\,(\langle x^2\rangle - \langle x\rangle^2) + (-2\alpha\,\langle x\rangle + \beta)^2 - 2\alpha)\\ &= -\hbar^2\left(4\alpha^2\,\frac{1}{4\alpha} + (-2\mathrm{i}\alpha x_0\sin(\omega t))^2 - 2\alpha\right)\\ &= 4\hbar^2\alpha^2\,x_0^2\sin^2(\omega t) + \hbar^2\alpha = m^2\omega^2\,x_0^2\sin^2(\omega t) + \frac{\hbar m\omega}{2}\;.\end{aligned}$$

Selvsagt er forventningsverdiene $\langle p\rangle$ og $\langle p^2\rangle$ reelle. Det må de være, siden $p$ og $p^2$ er Hermiteske operatorer.

3d)

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\;,\qquad \Delta p = \sqrt{\frac{\hbar m\omega}{2}}\;.$$

For det første ser vi at usikkerhetene $\Delta x$ og $\Delta p$ er tidsuavhengige. Det er visst bare potensialet for en harmonisk oscillator som er slik at det finnes løsninger av den tidsavhengige Schrödinger-ligningen med både $\Delta x$ og $\Delta p$ tidsuavhengige.

For det andre ser vi at Heisenbergs usikkerhetsrelasjon er oppfylt som en likhet,

$$\Delta x\;\Delta p = \frac{\hbar}{2}\;,$$

mens det som gjelder for en vilkårlig tilstand, er ulikheten $\Delta x\;\Delta p \geq \hbar/2$. Derfor kaller vi den koherente tilstanden for en minimum usikkerhetstilstand.

Forventningsverdien av energien er

$$\begin{aligned}\langle H\rangle &= \frac{\langle p^2\rangle}{2m} + \frac{1}{2}m\omega^2\,\langle x^2\rangle\\ &= \frac{1}{2}m\omega^2\,x_0^2\sin^2(\omega t) + \frac{\hbar\omega}{4} + \frac{1}{2}m\omega^2\,x_0^2\cos^2(\omega t) + \frac{\hbar\omega}{4}\\ &= \frac{1}{2}m\omega^2\,x_0^2 + \frac{\hbar\omega}{2}\;.\end{aligned}$$

Den er tidsuavhengig, selv om forventningsverdiene av $p^2$ og $x^2$ er tidsavhengige hver for seg. Dette er et så fundamentalt resultat at hvis vi fant en tidsavhengig forventningsverdi $\langle H \rangle$, så kunne vi si umiddelbart at vi hadde regnet feil.

Vi vet nemlig at når Hamilton-operatoren $H$ ikke er eksplisitt tidsavhengig, så er energien bevart. Det gjelder i kvantemekanikken, som det gjelder i klassisk mekanikk.

En bevegelseskonstant i kvantemekanikken er pr. definisjon en observabel $A$ som har tidsuavhengig forventningsverdi $\langle A \rangle$ i enhver tilstand. Og hva er betingelsen for det? Jo, for en operator $A$ som ikke er eksplisitt tidsavhengig, gjelder at

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle A \rangle = \frac{\mathrm{i}}{\hbar} \langle [H, A] \rangle \; .$$

En observabel $A$ er følgelig en bevegelseskonstant når den kommuterer med $H$.

Siden $H$ kommuterer med seg selv, er den en bevegelseskonstant.

Her er et bevis for formelen ovenfor. I Dirac-notasjon har vi at forventningsverdien av $A$ i en tilstand $|\psi\rangle$ er

$$\langle A \rangle = \langle \psi | A | \psi \rangle \; .$$

Tidsderivasjon gir at

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle A \rangle &= \left( \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle \psi | \right) A | \psi \rangle + \langle \psi | A \left( \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} | \psi \rangle \right) = \left( \frac{\mathrm{i}}{\hbar} \langle \psi | H \right) A | \psi \rangle + \langle \psi | A \left( -\frac{\mathrm{i}}{\hbar} H | \psi \rangle \right) \\ &= \frac{\mathrm{i}}{\hbar} \langle \psi | (HA - AH) | \psi \rangle = \frac{\mathrm{i}}{\hbar} \langle [H, A] \rangle \; . \end{aligned}$$

Vi bruker den tidsavhengige Schrödinger-ligningen for tilstanden $|\psi\rangle$,

$$\mathrm{i}\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} | \psi \rangle = H | \psi \rangle \; .$$

Hermitesk konjugering av den gir at

$$-\mathrm{i}\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \langle \psi | = \left( \mathrm{i}\hbar \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} | \psi \rangle \right)^\dagger = (H | \psi \rangle)^\dagger = \langle \psi | H \; .$$

3e) Den koherente tilstanden ligner maksimalt på en klassisk tilstand ved at den til enhver tid har et minimalt usikkerhetsprodukt $\Delta x \, \Delta p$. Av uttrykket for $|\psi|^2$ ser vi at vi har en Gaussisk bølgepakke som ved tiden $t$ har sitt topp-punkt i posisjonen $x_0 \cos(\omega t)$. Bølgepakken oscillerer fram og tilbake, uten å spre seg utover, på samme måte som den klassiske oscillatoren oscillerer, og med den samme frekvensen.

Hvis den klassiske harmoniske oscillatoren har posisjonen $x(t) = x_0 \cos(\omega t)$ ved tiden $t$, så har den hastighet $v(t) = (\mathrm{d}/\mathrm{d}t)\, x(t) = -\omega x_0 \sin(\omega t)$ og impuls $p(t) = mv(t) = -m\omega x_0 \sin(\omega t)$. Energien ved tiden $t$ er da

$$E(t) = \frac{(p(t))^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 (x(t))^2 = \frac{1}{2} m\omega^2 x_0^2 \; .$$

Den er igjen tidsuavhengig. Forventningsverdien $\langle H \rangle$ for en koherent tilstand til den kvantemekaniske oscillatoren er lik den klassiske energien pluss nullpunktsenergien $\hbar\omega/2$.