NTNU **Institutt for fysikk**

Midtsemesterprøve i FY3404/TFY18 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK

Torsdag 14. oktober 2004
08:45–09:45

Tillatte hjelpemidler: Vanlig kalkulator

Hvis du tar dette kurset som fagnummer TFY18 (fordypningsemne i teknologistudiet), skriv *navnet* ditt på hvert ark av oppgavesettet. Hvis du tar dette kurset som fagnummer FY3404 (fri studier), skriv *studentnummeret* ditt på hvert ark av oppgavesettet.

Dette oppgavesettet er på 3 sider.

Oppgave 1.
La $|n\rangle$ være en normert egentilstand til antallsoperatoren $N = a^\dagger a$ for en harmonisk oscillator, $N\,|n\rangle n = |n\rangle$ og $\langle n|n\rangle = 1$. Da er

A. $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n}|n+1\rangle$ ☐
B. $a^\dagger|n\rangle = n|n+1\rangle$ ☐
C. $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n+1}|n+1\rangle$ ☐
D. $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n}|n\rangle$ ☐
E. $a^\dagger|n\rangle = \sqrt{n}|n-1\rangle$ ☐

Oppgave 2.
En feltteori er definert ved Lagrangetettheten

$$\mathcal{L} = (\partial_\mu \varphi)^* \, (\partial^\mu \varphi) + \mathrm{i}\left(B^*_\mu \partial^\mu \varphi - \partial^\mu \varphi^* \, B_\mu\right)$$

der φ er et Klein-Gordon felt, og $B_\mu = B_\mu(x)$ er et eksternt gitt felt. Da er den kanonisk konjugerte impulstettheten til feltet φ gitt som

A. $\Pi_\varphi = \frac{1}{c^2}\dot{\varphi}^* + \frac{\mathrm{i}}{c}B^{0*}$ ☐
B. $\Pi_\varphi = \dot{\varphi} - \mathrm{i}B^0$ ☐
C. $\Pi_\varphi = \frac{1}{c^2}\dot{\varphi}^* - \frac{\mathrm{i}}{c}B^{0*}$ ☐
D. $\Pi_\varphi = \frac{1}{c}\dot{\varphi}^*$ ☐
E. $\Pi_\varphi = \frac{1}{c^2}\dot{\varphi}$ ☐

Oppgave 3.
For feltteorien definert i forrige oppgave, skriv ned bevegelsesligningen (Euler-Lagrange ligningen) for feltet φ.

Oppgave 4.
La $c_r(\boldsymbol{k}), c_r^\dagger(\boldsymbol{k})$ være et sett annihilasjons- og kreasjons-operatorer for et kvantisert fritt Diracfelt (definert i et endelig volum med periodiske grensebetingelser), og la $|\Omega\rangle$ være vakuumtilstanden for denne teorien. Da er matrise-elementet

$$\mathcal{M} \equiv \langle\Omega|c_r(\boldsymbol{k}_1)c_r(\boldsymbol{k}_2)c_r^\dagger(\boldsymbol{k}_3)c_r^\dagger(\boldsymbol{k}_4)|\Omega\rangle$$

lik

A. $\mathcal{M} = \delta_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_3}\delta_{\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{k}_4} + \delta_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_4}\delta_{\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{k}_3}$ ☐

B. $\mathcal{M} = \delta_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_4}\delta_{\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{k}_3} - \delta_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_3}\delta_{\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{k}_4}$ ☐

C. $\mathcal{M} = \delta_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}\delta_{\boldsymbol{k}_3\boldsymbol{k}_4} + \delta_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_3}\delta_{\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{k}_4} + \delta_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_4}\delta_{\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{k}_3}$ ☐

D. $\mathcal{M} = \delta_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_2}\delta_{\boldsymbol{k}_3\boldsymbol{k}_4} - \delta_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_3}\delta_{\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{k}_4} + \delta_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_4}\delta_{\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{k}_3}$ ☐

E. $\mathcal{M} = \delta_{\boldsymbol{k}_1\boldsymbol{k}_4}\delta_{\boldsymbol{k}_2\boldsymbol{k}_3}$ ☐

Oppgave 5.
En fri feltteori er definert ved Lagrangetettheten

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} + \partial_\mu\varphi^*\partial^\mu\varphi - M^2\varphi^*\varphi + \bar{\psi}\left(\mathrm{i}\gamma^\mu\partial_\mu - m\right)\psi,$$

der $F^{\mu\nu}$ er den elektromagnetiske felttensoren, φ er et Klein-Gordon felt og ψ er et Dirac-felt. I denne modellen er det formelle uttrykket for vakuumenergi per volumenhet, $\varepsilon = E_0/V$, lik

A. $\varepsilon = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\left[|p| + \sqrt{p^2+M^2} + \sqrt{p^2+m^2}\right]$ ☐

B. $\varepsilon = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\left[|p| + \sqrt{p^2+M^2} - 2\sqrt{p^2+m^2}\right]$ ☐

C. $\varepsilon = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\left[|p| + \sqrt{p^2+M^2} - \sqrt{p^2+m^2}\right]$ ☐

D. $\varepsilon = \int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^{3/2}}\left[|p| + \sqrt{p^2+M^2} - \sqrt{p^2+m^2}\right]$ ☐

E. $\varepsilon = \frac{1}{2}\int \frac{\mathrm{d}^3p}{(2\pi)^3}\left[|p| + 2\sqrt{p^2+M^2} - 4\sqrt{p^2+m^2}\right]$ ☐

når vi bruker naturlige enheter.

Oppgave 6.
Basert på ren dimensjonsanalyse ville man (i naturlige) enheter anta at vakuumenergien er av størrelsesorden $\varepsilon \approx 1\ \mathrm{TeV}^4$. Omregnet til SI-enheter svarer dette til en massetetthet på

A. $\varepsilon \approx 2.3 \cdot 10^{10}\ \mathrm{kg/m^3}$ ☐

B. $\varepsilon \approx 2.3 \cdot 10^{16}\ \mathrm{kg/m^3}$ ☐

C. $\varepsilon \approx 2.3 \cdot 10^{32}\ \mathrm{kg/m^3}$ ☐

D. $\varepsilon \approx 2.3 \cdot 10^{48}\ \mathrm{kg/m^3}$ ☐

E. $\varepsilon \approx 2.3 \cdot 10^{64}\ \mathrm{kg/m^3}$ ☐

Oppgitt: Lyshastigheten $c = 299\,792\,458$ m/s, Planck's konstant $\hbar = 1.055 \cdot 10^{-34}$ kg m^2/s, positronladningen $e = 1.602 \cdot 10^{-19}$ C.

Oppgave 7.
Når γ^μ er representert ved 4×4-matriser blir $T \equiv \mathrm{Tr}\left(\gamma^\mu\gamma^\nu\gamma^\lambda\gamma_\nu\gamma_\lambda\gamma_\mu\right)$ lik

A. $T = -128$ ☐
B. $T = -32$ ☐
C. $T = 4$ ☐
D. $T = 32$ ☐
E. $T = 128$ ☐

Oppgave 8.
La $\mathcal{T}$ være tidsordningsoperatoren og $\psi(x)$, $\bar{\psi}(x)$ et kvantisert Diracfelt. Da gjelder (i naturlige enheter, dvs. når $\hbar = c = 1$)

A. $\mathcal{T}\left\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\right\} = \mathcal{T}\left\{\bar{\psi}(y)\psi(x)\right\}$ ☐
B. $\mathcal{T}\left\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\right\} = \mathcal{T}\left\{\bar{\psi}(y)\psi(x)\right\} + \mathrm{i}S_F(x-y)$ ☐
C. $\mathcal{T}\left\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\right\} = \mathcal{T}\left\{\bar{\psi}(y)\psi(x)\right\} - \mathrm{i}S_F(x-y)$ ☐
D. $\mathcal{T}\left\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\right\} = -\mathcal{T}\left\{\bar{\psi}(y)\psi(x)\right\}$ ☐
E. $\mathcal{T}\left\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\right\} = -\mathcal{T}\left\{\bar{\psi}(y)\psi(x)\right\} - \mathrm{i}S_F(x-y)$ ☐

der $S_F(x-y)$ er Feynmans propagator for Dirac-partikler.

Oppgave 9.
Feynmans propagator for Dirac-partikler er definert ved ligningen

$$\mathrm{i}S_F(x-y) = \langle\Omega|\mathcal{T}\left\{\psi(x)\bar{\psi}(y)\right\}|\Omega\rangle.$$

For en Dirac-partikler med masse m kan denne propagatoren representeres ved Fourier-integralet (i naturlige enheter)

A. $\mathrm{i}S_F(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}\,\eta^{\mu\nu}}{p^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-y)}$ ☐
B. $\mathrm{i}S_F(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{-\mathrm{i}}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-y)}$ ☐
C. $\mathrm{i}S_F(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}}{p^2-m^2-\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-y)}$ ☐
D. $\mathrm{i}S_F(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}\,(\not{p}-m)}{p^2-m^2-\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-y)}$ ☐
E. $\mathrm{i}S_F(x-y) = \int \frac{\mathrm{d}^4p}{(2\pi)^4}\frac{\mathrm{i}\,(\not{p}+m)}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}p(x-y)}$ ☐

Oppgave 10.
Diracligningen

$$\left[\mathrm{i}\left(\gamma^0\partial_0 + \boldsymbol{\gamma}\cdot\boldsymbol{\nabla}\right) - m\right]\psi(x^0,\boldsymbol{x}) = 0$$

er invariant under rominversjon (paritets-transformasjon), $\boldsymbol{x} \to -\boldsymbol{x}$. Dvs. at hvis $\psi(x^0,\boldsymbol{x})$ løser Diracligningen så gjør også $\psi_P(x^0,\boldsymbol{x})$ det, når

A. $\psi_P(x^0,\boldsymbol{x}) = \psi(x^0,-\boldsymbol{x})$ ☐
B. $\psi_P(x^0,\boldsymbol{x}) = \gamma^0\,\psi(x^0,-\boldsymbol{x})$ ☐
C. $\psi_P(x^0,\boldsymbol{x}) = \mathrm{i}\gamma^2\,\psi^*(x^0,-\boldsymbol{x})$ ☐
D. $\psi_P(x^0,\boldsymbol{x}) = \gamma^1\,\gamma^3\,\psi^*(x^0,-\boldsymbol{x})$ ☐
E. $\psi_P(x^0,\boldsymbol{x}) = \psi^*(-x^0,-\boldsymbol{x})$ ☐