



Faglig kontakt under eksamen:
Professor Kåre Olaussen
Telefon: 9 36 52 eller 45 43 71 70

Eksamen i FY3404 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK

Tirsdag 30. november 2004

09:00–13:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ C

Typegodkjent kalkulator, med tomt minne (i henhold til liste utarbeidet av NTNU).

K. Rottman: *Matematisk formelsamling* (alle språkutgaver).

Schaum's Outline Series: *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*.

Sensur legges ut på fagets webside, <http://web.phys.ntnu.no/~kolausen/FY3404/>, såsnart den er klar

Dette oppgavesettet er på 4 sider.

Oppgave 1. Prosesser i *QED*

Tegn, i de tilfeller dette er mulig i kvante-elektrodynamikk (*QED*), Feynman diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for prosessene nedenfor. For noen tilfeller eksisterer det Feynman diagram, men prosessen er likevel ikke mulig i vakuum. Angi slike tilfeller, og forklar kort hva som gjør prosessen umulig.

a) $\mu^- \rightarrow e^- \gamma$

b) $\mu^- \rightarrow \mu^- e^+ e^-$

c) $e^+ \mu^- \rightarrow e^- \mu^+$

d) $e^+ \mu^- \rightarrow e^+ \mu^-$

e) $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$

f) $e^+ \gamma \rightarrow e^+ \gamma$

g) $e^+ \gamma \rightarrow e^+ \gamma \gamma$

h) $\gamma \gamma \rightarrow \gamma$

i) $\gamma \gamma \rightarrow \gamma \gamma$

- j) Positronium er et bundet system av et elektron og et positron (med bindingsenergi 6.8 eV). Det har vært foreslått å produsere positronium ved å rette en intens laserstråle mot en høyenergetisk elektronstråle. Dette vil altså føre til kollisjoner med $e^- \gamma$ i starttilstanden.

Hvilke Feynman diagrammer vil da svare til produksjon av positronium (og eventuelt andre partikler)?

Oppgave 2. To-foton annihilasjon av et elektron-positron par

I denne oppgaven skal du se på annihilasjon av et elektron-positron par, $e^+ e^- \rightarrow \gamma \gamma$. Betrakt prosessen fra massesenter systemet, og regn med naturlige enheter $\hbar = c = 1$ der dette er enklest.

- a) Tegn Feynman-diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for denne prosessen. Påfør diagrammene alle nødvendige impulser og indekser.

Anta at det innkommende elektronet (resp. positronet) har kvantetall p_1, s_1 (resp. p_2, s_2), og at de utgående fotonene har kvantetall k_1, r_1 og k_2, r_2 . Innfør videre $q = p_1 - k_1$ og $q' = p_1 - k_2$.

- b) Bruk Feynman-reglene i vedlegget til å skrive ned de tilhørende algebraiske bidragene til spredningsamplituden \mathcal{M}_{fi} .
- c) Bruk dimensjonsanalyse og kvalitativ informasjon fra Feynman diagrammene til å anslå størrelsesorden til det totale spredningstverrsnittet i det spesialtilfellet at elektronet har energi $E = 2m_e$. Dvs., bestem hvilken algebraisk kombinasjon av fysiske parametre tverrsnittet må avhenge av, og regn ut størrelsen på denne kombinasjonen i vanlige SI-enheter.

Oppgitt: $m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2$

$\hbar = 1.05457266 \times 10^{-34} \text{ Js} = 6.5821220 \times 10^{-16} \text{ eVs}$, $c = 299792458 \text{ ms}^{-1}$, $e = 1.60217733 \times 10^{-19} \text{ C}$, $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) = 1/137.0359895$.

- d) Det upolariserte tverrsnittet framkommer ved at vi summerer over spinntilstandene (r_1, r_2) til de utgående fotonene, og midler over spinntilstandene (s_1, s_2) til det innkommende elektron-positron paret. Amplitudekvadratet $\sum_{r_1 r_2 s_1 s_2} |\mathcal{M}_{fi}|^2$ kan da uttrykkes som en sum av spor over γ -matriser (med prefaktorer).

Finn denne summen. Du trenger foreløpig ikke å regne ut sporene.

- e) Anta nå at energien E til det innkommende elektronet er mye større enn dets hvileenergi, $E \gg m_e$, slik at man kan sette $m_e = 0$ i alle uttrykk. Finn i dette tilfellet eksplisitte uttrykk for følgende skalarprodukt mellom firervektorer: (i) $p_1 p_2$, (ii) $p_1 q$, (iii) $p_2 q$, (iv) $p_1 q'$, (v) $p_2 q'$, (vi) q^2 , (vii) q'^2 , (viii) $q q'$.

Uttrykk svaret ved energien E til det innkommende elektronet og vinkelen ϑ mellom det innkommende elektronet og et av de produserte fotonene.

- f) Finn i grensetilfellet fra underpunkt e) eksplisitte uttrykk for alle sporene som inngår i $\sum_{r s r' s'} |\mathcal{M}_{fi}|^2$ fra forrige punkt.

- g) Finn i grensetilfellet fra underpunkt e) eksplisitt uttrykk for det differensielle tverrsnittet $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{ann}}$. Uttrykk svaret ved energien E og vinkelen ϑ .

Oppgave 3. Klein-Gordon felt i et konformt flatt rom

Dynamikken til et komplekst Klein-Gordon felt $\varphi(x)$ i et krumt (men konformt flatt) rom er definert ved Lagrangetettheten

$$\mathcal{L} = e^{\lambda(x)} [\partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi], \quad (1)$$

der funksjonen $\lambda(x)$ antas å være kjent på forhånd. Vi bruker enheter der $\hbar = c = 1$.

- Hva blir de kanonisk konjugerte impulstetthetene Π_φ og Π_{φ^*} til feltene φ og φ^* ?
- Hva blir Hamiltontettheten \mathcal{H} ?
- Hva blir bevegelsesligningene (Euler-Lagrange ligningene) for φ og φ^* ?
- Vis at man ved å innføre feltet $\psi(x) = e^{\frac{1}{2}\lambda(x)} \varphi(x)$ kan transformere bevegelsesligningen til en Klein-Gordon ligning med et x -avhengig masseledd $M^2(x)$.
- Vi antar nå at $\lambda(x) = 2\mu t$ (i et gitt koordinatsystem), og kvantiserer denne feltteorien. Hva blir i dette tilfellet utviklingen av det annenkvantiserte feltet $\psi(x)$, uttrykt ved kreasjons- og annihilasjonsoperatorer? Du kan anta et endelig volum med periodiske grensebetingelser.

This page intentionally left blank. . .