



Faglig kontakt under eksamen:  
Professor Kåre Olaussen  
Telefon: 9 36 52 or 45 43 71 70

### Eksamen i FY3404/FY8307 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK

Fredag 9. juni 2006  
09:00–13:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ C

Standard kalkulator (i henhold til utarbeidet liste ved NTNU).

K. Rottman: *Matematisk formelsamling* (alle språkutgaver).

Schaum's Outline Series: *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*.

Karakterene vil bli lagt ut på fagets hjemmeside,  
<http://web.phys.ntnu.no/~kolaussen/FY8307/>,  
såsnart de er klare

Dette oppgavesettet er på 2 sider, pluss et vedlegg på 2 sider.

#### Oppgave 1. Prosesser i *QED*

Tegn, i de tilfelle dette er mulig i kvante-elektrodynamikk (*QED*), Feynman diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for prosessene nedenfor. For noen tilfeller eksisterer det Feynman diagram, men prosessen er likevel ikke mulig i vakuum. Angi slike tilfeller, og forklar kort hva som gjør prosessen umulig.

a)  $e^+\gamma \rightarrow e^+\gamma$

b)  $e^+\gamma \rightarrow e^+\gamma\gamma$

c)  $e^+\mu^- \rightarrow e^-\mu^+$

d)  $e^+\mu^- \rightarrow e^+\mu^-$

e)  $e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-$

f)  $e^- \rightarrow e^-\mu^+\mu^-$

g)  $\gamma\gamma \rightarrow \gamma$

h)  $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$

i)  $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma\gamma$

**Oppgave 2. Möllerspredning**

I denne oppgaven skal du se på noen aspekter ved Möllerspredning,  $e^-e^- \rightarrow e^-e^-$ .

- a) Tegne alle Feynman diagrammene til laveste ikke-trivielle orden for denne prosessen. Skriv ned alle nødvendige firerimpulser og indekser på diagrammene.

Anta at elektronene i starttilstanden har kvantetall  $p_i, s_i$ ,  $i = 1, 2$ , og at elektronene i slutttilstanden har kvantetall  $p'_f, s'_f$ ,  $f = 1, 2$ . Innfør videre  $q = p_1 - p'_1$  og  $q' = p_1 - p'_2$ .

- b) Bruk Feynmanreglene i vedlegget til å skrive ned det tilhørende algebraiske uttrykket for spredningsamplituden  $\mathcal{M}_{fi}$ .
- c) For å beregne det upolariserte spredningstverrsnittet trenger vi den kvadrerte amplituden  $|\overline{\mathcal{M}_{fi}}|^2$ , midlet over spinnene til elektronene i starttilstanden og summert over spinnene til elektronene i slutttilstanden,

$$|\overline{\mathcal{M}_{fi}}|^2 \equiv \frac{1}{4} \sum_{\{s_i, s'_f\}} \mathcal{M}_{fi} \mathcal{M}_{fi}^* \quad (1)$$

Dette uttrykket kan bli skrevet som en sum som involverer spor over  $\gamma$ -matriser. Vis at et ledd i denne summen har formen

$$\mathcal{F}(q) \times \text{Tr} \{ \gamma^\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma^\nu (\not{p}'_1 + m_e) \} \text{Tr} \{ \gamma_\mu (\not{p}_2 + m_e) \gamma_\nu (\not{p}'_2 + m_e) \}, \quad (2)$$

og bestem funksjonen  $\mathcal{F}(q)$ .

- d) Regn ut produktet av sporene over

$$Q \equiv \text{Tr} \{ \gamma^\mu (\not{p}_1 + m_e) \gamma^\nu (\not{p}'_1 + m_e) \} \text{Tr} \{ \gamma_\mu (\not{p}_2 + m_e) \gamma_\nu (\not{p}'_2 + m_e) \}. \quad (3)$$

Uttrykk svaret ved skalarprodukter av firerimpulsene som inngår.

**Oppgave 3. Klein-Gordon felt i et konformt flatt rom**

Dynamikken til et komplekst Klein-Gordon felt  $\varphi(x)$  i et krumt (men konformt flatt) rom er definert ved Lagrangetettheten

$$\mathcal{L} = e^{\lambda(x)} [\partial_\mu \varphi^* \partial^\mu \varphi - m^2 \varphi^* \varphi], \quad (4)$$

der funksjonen  $\lambda(x)$  antas å være kjent på forhånd. Vi bruker enheter der  $\hbar = c = 1$ .

- a) Hva blir de kanonisk konjugerte impulstetthetene  $\Pi_\varphi$  og  $\Pi_{\varphi^*}$  til feltene  $\varphi$  og  $\varphi^*$ ?
- b) Hva blir Hamiltontettheten  $\mathcal{H}$ ?
- c) Hva blir bevegelsesligningene (Euler-Lagrange ligningene) for  $\varphi$  og  $\varphi^*$ ?
- d) Vis at man ved å innføre feltet  $\psi(x) = e^{\frac{1}{2}\lambda(x)} \varphi(x)$  kan transformere bevegelsesligningen til en Klein-Gordon ligning med et  $x$ -avhengig masseledd  $M^2(x)$ .
- e) Vi antar nå at  $\lambda(x) = 2\mu t$  (i et gitt koordinatsystem), og kvantiserer denne feltteorien. Hva blir i dette tilfellet utviklingen av det annenkvantiserte feltet  $\psi(x)$ , uttrykt ved kreasjons- og annihilasjons-operatorer? Du kan anta et endelig volum med periodiske grensebetingelser.

### 1 Sammenheng mellom amplitude $\mathcal{M}_{fi}$ og tverrsnitt $\sigma$

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - \sum_f p'_f) \prod_{f=1}^n \frac{d^3 p'_f}{(2\pi)^3 2E'_f} \quad (5)$$

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2 (p_1 + p_2)^2} \frac{|\mathbf{p}_f|}{|\mathbf{p}_i|} |\mathcal{M}_{fi}|^2 d\Omega \quad \text{for } n = 2 \text{ i massesenter systemet} \quad (6)$$

### 2 Noen Feynmanregler for $-i\mathcal{M}_{fi}$ :

1. Utgående partikler			2. Innkommende partikler		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^-, \mu^-, \dots$		$\bar{u}(p, s)$	$e^-, \mu^-, \dots$		$u(p, s)$
$e^+, \mu^+, \dots$		$v(p, s)$	$e^+, \mu^+, \dots$		$\bar{v}(p, s)$
$\gamma$ (foton)		$e_\mu(k, r)^*$	$\gamma$ (foton)		$e_\mu(k, r)$
Uladet spinn-0		1	Uladet spinn-0		1

3. Propagatorer			4. Vekselvirkningsknuter		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	V.virkning $\mathcal{L}_{int}$	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^\pm, \mu^\pm, \dots$		$\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$	$e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$		$ie\gamma^\mu$
$\gamma$ (foton)		$\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$	$-\frac{1}{3!}\mu\varphi^3$		$-i\mu$
Uladet spinn-0		$\frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$	$-\frac{1}{4!}\lambda\varphi^4$		$-i\lambda$

- i) Konservering av firer-impuls i hver knute.
- ii) Integrasjon  $\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}$  over hver ubestemt impuls.
- iii) Faktor  $-1$  for hver lukket fermionsløyfe.
- iv) Relativt minustegn mellom diagrammer som adskiller seg ved ombytte av to fermioner.
- v) Kombinatorisk faktor  $1/S$ , der  $S$  er diagrammets symmetritall.

### 3 Noen fullstendighetsrelasjoner

Dirac partikler, Dirac antipartikler, og fotoner

$$\sum_{s=1}^2 u(p, s) \bar{u}(p, s) = \not{p} + m, \quad \sum_{s=1}^2 v(p, s) \bar{v}(p, s) = \not{p} - m \quad (7)$$

$$\sum_{r=1}^2 e_\mu(k, r) e_\nu^*(k, r) = -\eta_{\mu\nu} + \text{irrelevante ledd} \quad (8)$$

### 4 Dirac's $\gamma$ -matriser

#### 4.1 Standardrepresentasjonen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

der  $I$  er en  $2 \times 2$  enhetsmatrise, og  $\boldsymbol{\sigma}$  er Pauli-matrisene,

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

som oppfyller den algebraiske relasjonen

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i\epsilon^{ijk} \sigma^k, \text{ dvs. at } (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (11)$$

#### 4.2 Algebraiske relasjoner

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \implies \not{p} \not{p} = p^2 \quad (12)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu \implies \gamma_\mu \not{p} \gamma^\mu = -2\not{p} \quad (13)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma_\mu = 4\eta^{\nu\lambda} \implies \gamma_\mu \not{p} \not{q} \gamma^\mu = 4(pq) \quad (14)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\lambda \gamma^\nu \implies \gamma_\mu \not{p} \not{q} \not{r} \gamma^\mu = -2\not{r} \not{q} \not{p} \quad (15)$$

#### 4.3 Noen spor-uttrykk

$$\text{Tr } 1 = 4 \quad (16)$$

$$\text{Tr } \gamma^\mu = 0 \quad (17)$$

$$\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu = 4\eta^{\mu\nu} \implies \text{Tr } \not{p} \not{q} = 4(pq) \quad (18)$$

$$\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda = 0 \quad (19)$$

$$\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma = 4(\eta^{\mu\nu} \eta^{\lambda\sigma} - \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\lambda}) \quad (20)$$

$$\implies \text{Tr } \not{p} \not{q} \not{r} \not{s} = 4(pq)(rs) - 4(pr)(qs) + 4(ps)(qr)$$