NTNU

Institutt for fysikk
Fakultet for fysikk, informatikk
og matematikk

Løsningsforslag til eksamen i
FY8306 KVANTEFELTTEORI

Fredag 9. juni 2006

Dette løsningsforslaget er på 3 sider, pluss et vedlegg på 2 sider.

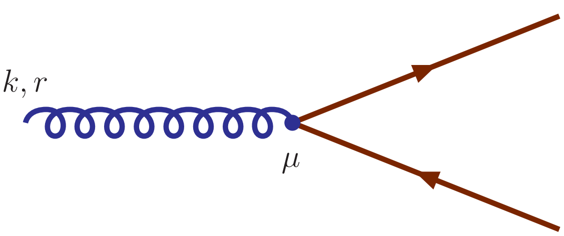
Oppgave 1. Henfall av Z_0 vektormesonet i Standardmodellen

I denne oppgaven skal du studere henfall av Z^0 vektormesonet i Standardmodellen for partikkelfysikk. De nødvendige Feynmanreglene og annet relevant formelverk er vedlagt oppgavesettet. Anta et Lorentz system der Z^0 partikkelen er i ro før henfallet.

a) Tegn Feynmandigrammet for den generiske henfallsprosessen

$$Z^0 \to f\bar{f},$$

der f står for ett av de mulige fermionene i Standardmodellen.



b) Skriv ned den tilhørende henfallsamplituden $\mathcal{M}_{fi}$.

$$-\mathrm{i}\mathcal{M}_{fi} = \frac{-\mathrm{i}e}{\sin 2\theta_W}\left[\bar{u}(p_1, s_1)\gamma^\mu\left(g_V - g_A\gamma^5\right)v(p_2, s_2)\right]\varepsilon_\mu(k, r) \tag{1}$$

c) Finn amplitudekvadratet $\overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2}$, midlet over spinnet til Z^0-partikkelen, og summert over spinnene til f- og $\bar{f}$-partiklene. Du kan neglisjere alle ledd som er proporsjonale med fermionmassen m_f. (Dette er ekvivalent med å anta at $m_f^2 \ll M_Z^2$.)

Vi finner først ved konjugering av (1) at

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}\mathcal{M}^*_{fi} &= \frac{\mathrm{i}e}{\sin 2\theta_W}\left[\bar{v}(p_2, s_2)\gamma^0\left(g_V - g_A\gamma^5\right)\gamma^0\gamma^\nu\gamma^0\,\gamma^0\,u(p_1, s_1)\right]\varepsilon^*_\nu(k, r) \\
&= \frac{\mathrm{i}e}{\sin 2\theta_W}\left[\bar{v}(p_2, s_2)\gamma^\nu\left(g_V - g_A\gamma^5\right)u(p_1, s_1)\right]\varepsilon^*_\nu(k, r).
\end{aligned}$$

Her har vi først brukt at $v(p_2,s_2)^\dagger = \bar{v}(p_2,s_2)\gamma^0$, $\bar{u}(p_1,s_1)^\dagger = \gamma^0 u(p_1,s_1$, $\gamma^{\mu\dagger} = \gamma^0\gamma^\mu\gamma^0$ og $\gamma^{5\dagger} = \gamma^5$, og i neste likhet at γ^5 antikommuterer med γ^μ. Fra dette følger på standard vis at

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{fi}\,\mathcal{M}^*_{fi} &= \left[\gamma^\mu(g_V - g_A\gamma^5)v(p_2,s_2)\bar{v}(p_2,s_2)\gamma^\nu(g_V - g_A\gamma^4)u(p_1)\bar{u}(p_1,s_1)\right]_{\alpha\alpha} \times \\ &\quad\times\left(\frac{e}{\sin 2\theta_W}\right)^2 \varepsilon_\mu(k,r)\varepsilon^*_\nu(k,r),\end{aligned}$$

der det er en underforstått matrisemultiplikasjon av størrelsene som har spinorindekser. Ved bruk av kompletthetsrelasjonene finner vi så

$$\begin{aligned}\sum_{rs_1s_2}\mathcal{M}_{fi}\,\mathcal{M}^*_{fi} &= \mathrm{Tr}\left[\gamma^\mu(g_V - g_A\gamma^5)\,(\not{p}_2 - m_f)\,\gamma^\nu(g_V - g_A\gamma^5)\,(\not{p}_1 + m_f)\right] \times \\ &\quad\times\left(\frac{e}{\sin 2\theta_W}\right)^2\left(-\eta_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu/M_Z^2\right)\end{aligned}$$

d) Bruk dette resultatet, og ligning (12) i vedlegget, til å finne den integrerte henfallsraten $\Gamma_{Z\to f\bar{f}}$.

e) Den totale henfallsraten er gitt som

$$\Gamma_{\text{tot}} = \sum_f \Gamma_{Z\to f\bar{f}}, \tag{2}$$

der summen løper over alle kjente typer leptoner, nøytrinoer, og kvarker som er lette nok til at henfallsprosessen kan gå.

Hva er sannsynligheten $\Gamma_{Z\to e\bar{e}}/\Gamma_{\text{tot}}$ for at Z^0 skal henfalle til et elektron–positron par?

f) Hva er sannsynligheten for at Z^0 skal henfalle til et nøytrino–antinøytrino par?

g) Hva blir den numeriske verdien til den totale henfallsraten Γ_{tot}? Sammenlign dette svaret med den eksperimentelle verdien $\Gamma_{\text{tot}} \approx 2.4952$ GeV.

Oppgitt:

$M_Z = 91.19$ GeV
$\sin^2\theta_W = 0.231$
$\alpha = 1/137.036$

Oppgave 2. SU(2) gauge modeller

I denne oppgaven skal du se på noen aspekter av kvantefelt modeller der gaugegruppen er ren SU(2) (isospinn). Dvs. at de kovariant deriverte kan skrives på formen

$$D_{\mu ab} = \partial_\mu\delta_{ab} + \mathrm{i}gT^k_{ab}A^k_\mu, \tag{3}$$

der μ er en rom-tids indeks, a og b er isospinn indekser, og k skal summeres over de tre generatorene til SU(2). Matrisene T^k avhenger av isospinnet til feltet som den kovariant deriverte virker på, men oppfyller alltid kommuteringsregelen

$$\left[T^k, T^\ell\right] = \mathrm{i}\,\varepsilon^{k\ell m}T^m. \tag{4}$$

For et isospinn-$\frac{1}{2}$ felt har vi

$$T^k_{ab} = \frac{1}{2}\sigma^k_{ab}, \tag{5}$$

der σ^k er en Pauli-matrise (altså en kompleks 2×2 matrise). For et isospinn-1 felt har vi

$$T^k_{ab} = \mathrm{i}\,\varepsilon^{kab} \tag{6}$$

(disse er altså rent imaginære 3×3 matriser).

Merk at mange av de spørsmålene som følger er uavhengig av hverandre, slik at du ikke trenger å få til hvert enkelt delpunkt for å gå videre.

a) Skriv ned, på matriseform, sammenhengen mellom den kovariant deriverte D_μ (som en matrise med isospinn indekser) og felttensoren $F_{\mu\nu}$ (som en matrise med isospinn indekser).

b) Matrisen $F_{\mu\nu}$ kan skrives som en sum over generatorene T^k,

$$F_{\mu\nu ab} = T^k_{ab} F^k_{\mu\nu}. \tag{7}$$

Vis at feltene $F^k_{\mu\nu}$ ikke avhenger av representasjonsmatrisene T^k, dvs om de f.eks. er definert ved ligning (5) eller (6) sålenge $T^k \neq 0$, men bare av feltene A^k_μ. Skriv ned den eksplisitte sammenhengen mellom A^k_μ og $F^k_{\mu\nu}$.

c) Langrangetettheten for modellene skal ha et bidrag som avhenger av felttensoren $F^k_{\mu\nu}$ ("Maxwell"-bidraget $\mathcal{L}_A$). Hvordan ser dette leddet ut?

d) Vi antar nå først en modell der vi også har et isospinn-$\frac{1}{2}$ skalarfelt φ, med bidrag til Lagrangetettheten

$$\mathcal{L}_\varphi = (D_\mu\varphi)^\dagger D^\mu\varphi + m^2\varphi^\dagger\varphi - \frac{1}{4}\lambda(\varphi^\dagger\varphi)^2, \tag{8}$$

med m^2 og λ positive. (Den totale Langrangetettheten er altså $\mathcal{L} = \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_\varphi$).
Hvilken verdi av $\varphi^\dagger\varphi$ minimaliserer potensialet $V = -m^2\varphi^\dagger\varphi + \frac{1}{4}\lambda(\varphi^\dagger\varphi)^2$?

e) Vakuumtilstanden for systemet vil være karakterisert av den verdien av φ-feltet som minimaliserer potensialet V. Ved passende valg av gauge kan vi anta at dette har formen

$$\langle\,\Omega\,|\,\varphi\,|\,\Omega\,\rangle = \varphi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ \phi_0 \end{pmatrix}, \tag{9}$$

med ϕ_0 reell. Dette gir opphav til masseledd for gaugefeltene A^k_μ (Higg's mekanismen).
Hva blir massene til de tre gaugefeltene i dette tilfellet?

f) Vi vil nå i stedet studere tilfellet der skalarfeltet har isospinn-1.
Vis først at representasjonsmatrisene T^k definert av ligning (6) oppfyller kommuteringsregelen (4).

Tips: Bruk relasjonen $\varepsilon^{abc}\varepsilon^{dec} = \delta^{ad}\delta^{be} - \delta^{ae}\delta^{bd}$, og at ε-symbolet er totalt antisymmetrisk.

g) Vi antar nå en modell med et reellt isospinn-1 skalarfelt $\boldsymbol{\chi}$, med bidrag til Lagrange-tettheten

$$\mathcal{L}_\chi = \frac{1}{2}D_\mu\boldsymbol{\chi}\cdot D^\mu\boldsymbol{\chi} + \frac{1}{2}m^2\boldsymbol{\chi}\cdot\boldsymbol{\chi} - \frac{1}{4!}\lambda(\boldsymbol{\chi}\cdot\boldsymbol{\chi})^2 \tag{10}$$

med m^2 og λ positive, og der $\boldsymbol{\chi}$-feltet har tre reelle komponenter (derfor vektor-notatasjonen). (Den totale Langrangetettheten er altså $\mathcal{L} = \mathcal{L}_A + \mathcal{L}_\chi$).
Hvilken verdi av $\boldsymbol{\chi}\cdot\boldsymbol{\chi}$ minimaliserer potensialet $V = -\frac{1}{2}m^2\boldsymbol{\chi}\cdot\boldsymbol{\chi} + \frac{1}{4!}\lambda(\boldsymbol{\chi}\cdot\boldsymbol{\chi})^2$?

h) Vakuumtilstanden for systemet vil nå være karakterisert av den verdien av $\boldsymbol{\chi}$-feltet som minimaliserer potensialet V. Ved passende valg av gauge kan vi anta at dette har formen

$$\langle\,\Omega\,|\,\boldsymbol{\chi}\,|\,\Omega\,\rangle = \varphi_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \chi_0 \end{pmatrix}, \tag{11}$$

med χ_0 reell. Dette gir opphav til masseledd for gaugefeltene A^k_μ (Higg's mekanismen).
Hva blir massene til de tre gaugefeltene i dette tilfellet?

1 Sammenheng mellom amplitude $\mathcal{M}_{fi}$ og henfallsrate Γ

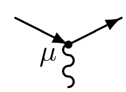
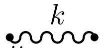
Sammenhengen mellom Feynman amplitude $\mathcal{M}_{fi}$ og henfallsrate $\mathrm{d}\Gamma$ er gitt som

$$\mathrm{d}\Gamma = (2\pi)^4\delta^{(4)}(p - \Sigma p'_f)\,\frac{1}{2E}\,|\mathcal{M}_{fi}|^2\,\prod_f \frac{\mathrm{d}^3\boldsymbol{p}'_f}{(2\pi)^3 2E'_f}, \qquad (12)$$

der p, E er henholdsvis firerimpuls og energi til partikkelen som henfaller; de øvrige størrelsene refererer til partiklene i sluttilstanden.

2 Noen Feynmanregler for $-\mathrm{i}\mathcal{M}_{fi}$:

1. Utgående partikler			2. Innkommende partikler		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^-, \mu^-, \cdots$	$\bullet\!\!\longrightarrow$ p, s	$\overline{u}(p,s)$	$e^-, \mu^-, \cdots$	p, s $\longrightarrow\!\!\bullet$	$u(p,s)$
$e^+, \mu^+, \cdots$	$\bullet\!\!\longleftarrow$ p, s	$v(p,s)$	$e^+, \mu^+, \cdots$	p, s $\longleftarrow\!\!\bullet$	$\overline{v}(p,s)$
Z^0	k, r	$\varepsilon_\mu(k,r)^*$	Z^0	k, r 	$\varepsilon_\mu(k,r)$

3. Propagatorer			4. Vekselvirkningsknuter		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	V.virkning $\mathcal{L}_{\text{int}}$	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^\pm, \mu^\pm, \cdots$	$\overset{p}{\bullet\!\!\longrightarrow\!\!\bullet}$	$\frac{\mathrm{i}(\not{p}+m)}{p^2-m^2+\mathrm{i}\epsilon}$	$\frac{-e}{\sin 2\theta_W}\overline{\psi}\gamma^\mu(g_V - g_A\gamma^5)\psi Z_\mu$		$\frac{-\mathrm{i}e}{\sin 2\theta_W}\gamma^\mu(g_V - g_A\gamma^5)$
Z^0	μ  ν, k	$\frac{-\mathrm{i}(\eta_{\mu\nu}-k_\mu k_\nu/M_Z^2)}{k^2-M_Z^2+\mathrm{i}\epsilon}$			

Her er

$$g_V = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{for } \nu_e,\ \nu_\mu,\ \nu_\tau \\ \frac{1}{2}\left(-1+4\sin^2\theta_W\right) & \text{for } e,\ \mu,\ \tau \\ \frac{1}{2}\left(1-\frac{8}{3}\sin^2\theta_W\right) & \text{for } u,\ c,\ t \\ \frac{1}{2}\left(-1+\frac{4}{3}\sin^2\theta_W\right) & \text{for } d,\ s,\ b \end{cases} \qquad g_A = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{for } \nu_e,\ \nu_\mu,\ \nu_\tau,\ u,\ c,\ t \\ -\frac{1}{2} & \text{for } e,\ \mu,\ \tau,\ d,\ s,\ b \end{cases}$$

3 Noen fullstendighetsrelasjoner

Dirac partikler, Dirac antipartikler, og Z^0 vektorbosoner

$$\sum_{s=1}^{2} u(p,s)\,\overline{u}(p,s) = \not{p} + m, \qquad \sum_{s=1}^{2} v(p,s)\,\overline{v}(p,s) = \not{p} - m \tag{13}$$

$$\sum_{r=1}^{3} \varepsilon_\mu(k,r)\,\varepsilon^*_\nu(k,r) = -\eta_{\mu\nu} + k_\mu k_\nu / M_Z^2 \tag{14}$$

4 Dirac's γ-matriser

4.1 Standardrepresentasjonen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \qquad \gamma^5 = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}, \tag{15}$$

der I er en 2×2 enhetsmatrise, og $\boldsymbol{\sigma}$ er Pauli-matrisene,

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{16}$$

som oppfyller den algebraiske relasjonen

$$\sigma^i\,\sigma^j = \delta^{ij} + \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\,\sigma^k, \text{ dvs. at } (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a})\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathrm{i}\,\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \tag{17}$$

4.2 Algebraiske relasjoner

$$\{\gamma^5, \gamma^\nu\} = 0, \tag{18}$$

$$(\gamma^5)^2 = 1, \tag{19}$$

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\,\eta^{\mu\nu} \quad \Longrightarrow \not{p}\,\not{p} = p^2 \tag{20}$$

$$\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma_\mu = -2\,\gamma^\nu \quad \Longrightarrow \gamma_\mu\,\not{p}\,\gamma^\mu = -2\,\not{p} \tag{21}$$

$$\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda\,\gamma_\mu = 4\,\eta^{\nu\lambda} \quad \Longrightarrow \gamma_\mu\,\not{p}\,\not{q}\,\gamma^\mu = 4\,(pq) \tag{22}$$

$$\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda\,\gamma^\sigma\,\gamma_\mu = -2\,\gamma^\sigma\,\gamma^\lambda\,\gamma^\nu \quad \Longrightarrow \gamma_\mu\,\not{p}\,\not{q}\,\not{r}\,\gamma^\mu = -2\not{r}\,\not{q}\,\not{p} \tag{23}$$

4.3 Noen spor-uttrykk

$$\mathrm{Tr}\,1 = 4 \tag{24}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^5 = 0 \tag{25}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu = 0 \tag{26}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\gamma^5 = 0 \tag{27}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu = 4\,\eta^{\mu\nu} \quad \Longrightarrow \mathrm{Tr}\,\not{p}\,\not{q} = 4\,(pq) \tag{28}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu\gamma^5 = 0 \tag{29}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda = 0 \tag{30}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda\gamma^5 = 0 \tag{31}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda\,\gamma^\sigma = 4\left(\eta^{\mu\nu}\,\eta^{\lambda\sigma} - \eta^{\mu\lambda}\,\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\,\eta^{\nu\lambda}\right) \tag{32}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Tr}\,\not{p}\,\not{q}\,\not{r}\,\not{s} = 4(pq)(rs) - 4(pr)(qs) + 4(ps)(qr)$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda\,\gamma^\sigma\,\gamma^5 = -4\mathrm{i}\,\varepsilon^{\mu\nu\lambda\sigma} \tag{33}$$