



Faglig kontakt under eksamen:  
Professor Kåre Olaussen  
Telefon: 9 36 52 eller 45 43 71 70

### Eksamen i FY8307 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK

Torsdag 1. desember 2005  
09:00–13:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ C

Typegodkjent kalkulator, med tomt minne (i henhold til liste utarbeidet av NTNU).

K. Rottman: *Matematisk formelsamling* (alle språkutgaver).

Schaum's Outline Series: *Mathematical Handbook of Formulas and Tables*.

Sensur legges ut på fagets webside, <http://web.phys.ntnu.no/~kolausen/FY8307/>, så snart den er klar

Dette oppgavesettet er på 4 sider, pluss et vedlegg på 2 sider.

#### Oppgave 1. Forenklet Higgsmode

I denne oppgaven skal du analysere modellen definert ved Lagrange-tettheten

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4e^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \kappa^2 \left( D_\mu e^{i\phi} \right)^* \left( D^\mu e^{i\phi} \right), \quad (1)$$

der  $D_\mu = \partial_\mu + iA_\mu$ , og  $F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$ . Her er  $e^2$  og  $\kappa^2$  konstanter, mens  $A^\mu$  og  $\phi$  er de dynamiske feltene. Vi bruker naturlige enheter.  $\hbar$

- Lagrangetettheten (1) er invariant under *globale* fasetransformasjoner,  $\phi \rightarrow \phi + \alpha$ , der  $\alpha$  er konstant. Hva blir den tilhørende konserverte Nöther-strømmen?
- Vis at Lagrangetettheten (1) er invariant under *lokale* fasetransformasjoner,  $\phi(x) \rightarrow \phi(x) + \alpha(x)$ , hvis man gjør en tilhørende transformasjon av  $A^\mu$ -feltet. Skriv ned denne transformasjonen.
- Hva blir de kanonisk konjugerte impulstetthetene  $\Pi_\phi$  og  $\Pi_\mu$  til feltene  $\phi$  og  $A^\mu$ ?
- Finn Euler-Lagrange ligningene for  $A^\mu$  og  $\phi$ .
- Vis at man kan gjøre en gauge-transformasjon slik at  $\phi$ -feltet elimineres fra Lagrange-tettheten (1). Vis at bevegelsesligningen for  $A^\mu$  i dette tilfellet reduserer til Klein-Gordon ligningen,

$$(\square + M^2) A^\mu = 0, \quad (2)$$

og finn  $M^2$  uttrykt ved parametrene i Lagrangetettheten.

f)

- g) Vi antar nå at  $\lambda(x) = 2\mu t$  (i et gitt koordinatsystem), og kvantiserer denne feltteorien. Hva blir i dette tilfellet utviklingen av det ammenkvantiserte feltet  $\psi(x)$ , uttrykt ved kreasjons- og annihilasjons-operatorer? Du kan anta et endelig volum med periodiske grensebetingelser.

### Oppgave 2. Prosesser i *QED*

Tegn, i de tilfeller dette er mulig i kvante-elektrodynamikk (*QED*), Feynman diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for prosessene nedenfor. For noen tilfeller eksisterer det Feynman diagram, men prosessen er likevel ikke mulig i vakuum. Angi slike tilfeller, og forklar kort hva som gjør prosessen umulig.

- a)  $\mu^- \rightarrow e^- \gamma$
- b)  $\mu^- \rightarrow \mu^- e^+ e^-$
- c)  $e^+ \mu^- \rightarrow e^- \mu^+$
- d)  $e^+ \mu^- \rightarrow e^+ \mu^-$
- e)  $e^+ e^- \rightarrow \mu^+ \mu^-$
- f)  $e^+ \gamma \rightarrow e^+ \gamma$
- g)  $e^+ \gamma \rightarrow e^+ \gamma \gamma$
- h)  $\gamma \gamma \rightarrow \gamma$
- i)  $\gamma \gamma \rightarrow \gamma \gamma$
- j)

### Oppgave 3. Compton spredning på antimyon

I denne oppgaven skal du se på annihilasjon av et elektron-positron par,  $e^+ e^- \rightarrow \gamma \gamma$ . Betrakt prosessen fra massesenter systemet, og regn med naturlige enheter  $\hbar = c = 1$  der dette er enklest.

- a) Tegn Feynman-diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for denne prosessen. Påfør diagrammene alle nødvendige impulser og indekser.  
Anta at det innkommende elektronet (resp. positronet) har kvantetall  $p_1, s_1$  (resp.  $p_2, s_2$ ), og at de utgående fotonene har kvantetall  $k_1, r_1$  og  $k_2, r_2$ . Innfør videre  $q = p_1 - k_1$  og  $q' = p_1 - k_2$ .
- b) Bruk Feynman-reglene i vedlegget til å skrive ned de tilhørende algebraiske bidragene til spredningsamplituden  $\mathcal{M}_{fi}$ .
- c) Bruk dimensjonsanalyse og kvalitativ informasjon fra Feynman diagrammene til å anslå størrelsesorden til det totale spredningstverrsnittet i det spesialtilfellet at elektronet har energi  $E = 2m_e$ . Dvs., bestem hvilken algebraisk kombinasjon av fysiske parametre tverrsnittet må avhenge av, og regn ut størrelsen på denne kombinasjonen i vanlige SI-enheter.

**Oppgitt:**  $m_e = 0.511 \text{ MeV}/c^2$

$\hbar = 1.054\,572\,66 \times 10^{-34} \text{ J s} = 6.582\,122\,0 \times 10^{-16} \text{ eV s}$ ,  $c = 299\,792\,458 \text{ m s}^{-1}$ ,  $e = 1.602\,177\,33 \times 10^{-19} \text{ C}$ ,  $\alpha = e^2/(4\pi\epsilon_0\hbar c) = 1/137.035\,9895$ .

- d) Det upolariserte tverrsnittet framkommer ved at vi summerer over spinntilstandene  $(r_1, r_2)$  til de utgående fotonene, og midler over spinntilstandene  $(s_1, s_2)$  til det innkommende elektron-positron paret. Amplitudekvadratet  $\sum_{r_1 r_2 s_1 s_2} |\mathcal{M}_{fi}|^2$  kan da uttrykkes som en sum av spor over  $\gamma$ -matriser (med prefaktorer).

Finn denne summen. Du trenger foreløpig ikke å regne ut sporene.

- e) Anta nå at energien  $E$  til det innkommende elektronet er mye større enn dets hvileenergi,  $E \gg m_e$ , slik at man kan sette  $m_e = 0$  i alle uttrykk. Finn i dette tilfellet eksplisitte uttrykk for følgende skalarprodukt mellom firervektorer: (i)  $p_1 p_2$ , (ii)  $p_1 q$ , (iii)  $p_2 q$ , (iv)  $p_1 q'$ , (v)  $p_2 q'$ , (vi)  $q^2$ , (vii)  $q'^2$ , (viii)  $q q'$ .

Uttrykk svaret ved energien  $E$  til det innkommende elektronet og vinkelen  $\vartheta$  mellom det innkommende elektronet og et av de produserte fotonene.

- f) Finn i grensetilfellet fra underpunkt e) eksplisitte uttrykk for alle sporene som inngår i  $\sum_{r s r' s'} |\mathcal{M}_{fi}|^2$  fra forrige punkt.

- g) Finn i grensetilfellet fra underpunkt e) eksplisitt uttrykk for det differensielle tverrsnittet  $(\frac{d\sigma}{d\Omega})_{\text{ann}}$ . Uttrykk svaret ved energien  $E$  og vinkelen  $\vartheta$ .

This page intentionally left blank. . .

### 1 Sammenheng mellom amplitude $\mathcal{M}_{fi}$ og tverrsnitt $\sigma$

$$d\sigma = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{4\sqrt{(p_1 \cdot p_2)^2 - m_1^2 m_2^2}} (2\pi)^4 \delta^{(4)}(p_1 + p_2 - \sum_f p'_f) \prod_{f=1}^n \frac{d^3 p'_f}{(2\pi)^3 2E'_f} \quad (3)$$

$$d\sigma = \frac{1}{64\pi^2 (p_1 + p_2)^2} \frac{|\mathbf{p}_f|}{|\mathbf{p}_i|} |\mathcal{M}_{fi}|^2 d\Omega \quad \text{for } n = 2 \text{ i massesenter systemet} \quad (4)$$

### 2 Noen Feynmanregler for $-i\mathcal{M}_{fi}$ :

1. Utgående partikler			2. Innkommende partikler		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^-, \mu^-, \dots$		$\bar{u}(p, s)$	$e^-, \mu^-, \dots$		$u(p, s)$
$e^+, \mu^+, \dots$		$v(p, s)$	$e^+, \mu^+, \dots$		$\bar{v}(p, s)$
$\gamma$ (foton)		$e_\mu(k, r)^*$	$\gamma$ (foton)		$e_\mu(k, r)$
Uladet spinn-0		1	Uladet spinn-0		1

3. Propagatorer			4. Vekselvirkningsknuter		
Type partikler	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk	V.virkning $\mathcal{L}_{int}$	Grafisk symbol	Algebraisk uttrykk
$e^\pm, \mu^\pm, \dots$		$\frac{i(\not{p} + m)}{p^2 - m^2 + i\epsilon}$	$e\bar{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$		$ie\gamma^\mu$
$\gamma$ (foton)		$\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{k^2 + i\epsilon}$	$-\frac{1}{3!}\mu\varphi^3$		$-i\mu$
Uladet spinn-0		$\frac{i}{k^2 - m^2 + i\epsilon}$	$-\frac{1}{4!}\lambda\varphi^4$		$-i\lambda$

- i) Konservering av firer-impuls i hver knute.
- ii) Integrasjon  $\int \frac{d^4 q}{(2\pi)^4}$  over hver ubestemt impuls.
- iii) Faktor  $-1$  for hver lukket fermionsløyfe.
- iv) Relativt minustegn mellom diagrammer som adskiller seg ved ombytte av to fermioner.
- v) Kombinatorisk faktor  $1/S$ , der  $S$  er diagrammets symmetritall.

### 3 Noen fullstendighetsrelasjoner

Dirac partikler, Dirac antipartikler, og fotoner

$$\sum_{s=1}^2 u(p, s) \bar{u}(p, s) = \not{p} + m, \quad \sum_{s=1}^2 v(p, s) \bar{v}(p, s) = \not{p} - m \quad (5)$$

$$\sum_{r=1}^2 e_\mu(k, r) e_\nu^*(k, r) = -\eta_{\mu\nu} + \text{irrelevante ledd} \quad (6)$$

### 4 Dirac's $\gamma$ -matriser

#### 4.1 Standardrepresentasjonen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \quad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

der  $I$  er en  $2 \times 2$  enhetsmatrise, og  $\boldsymbol{\sigma}$  er Pauli-matrisene,

$$\sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

som oppfyller den algebraiske relasjonen

$$\sigma^i \sigma^j = \delta^{ij} + i\epsilon^{ijk} \sigma^k, \text{ dvs. at } (\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{a})(\boldsymbol{\sigma} \cdot \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + i\boldsymbol{\sigma} \cdot (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \quad (9)$$

#### 4.2 Algebraiske relasjoner

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\eta^{\mu\nu} \implies \not{p} \not{p} = p^2 \quad (10)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma_\mu = -2\gamma^\nu \implies \gamma_\mu \not{p} \gamma^\mu = -2\not{p} \quad (11)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma_\mu = 4\eta^{\nu\lambda} \implies \gamma_\mu \not{p} \not{q} \gamma^\mu = 4(pq) \quad (12)$$

$$\gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma \gamma_\mu = -2\gamma^\sigma \gamma^\lambda \gamma^\nu \implies \gamma_\mu \not{p} \not{q} \not{r} \gamma^\mu = -2\not{r} \not{q} \not{p} \quad (13)$$

#### 4.3 Noen spor-uttrykk

$$\text{Tr } 1 = 4 \quad (14)$$

$$\text{Tr } \gamma^\mu = 0 \quad (15)$$

$$\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu = 4\eta^{\mu\nu} \implies \text{Tr } \not{p} \not{q} = 4(pq) \quad (16)$$

$$\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda = 0 \quad (17)$$

$$\text{Tr } \gamma^\mu \gamma^\nu \gamma^\lambda \gamma^\sigma = 4(\eta^{\mu\nu} \eta^{\lambda\sigma} - \eta^{\mu\lambda} \eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma} \eta^{\nu\lambda}) \quad (18)$$

$$\implies \text{Tr } \not{p} \not{q} \not{r} \not{s} = 4(pq)(rs) - 4(pr)(qs) + 4(ps)(qr)$$