NTNU

Institutt for fysikk
Fakultet for fysikk, informatikk
og matematikk

Løsningsforslag til eksamen i
FY8307 RELATIVISTISK KVANTEMEKANIKK

Torsdag 1. desember 2005

Dette løsningsforslaget er på 7 sider.

Oppgave 1. Forenklet Higgsmodell

I denne oppgaven skal du analysere modellen definert ved Lagrange-tettheten

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{4e^2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} + \kappa^2 \left(D_\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \right)^* \left(D^\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \right), \tag{1}$$

der $D_\mu = \partial_\mu + \mathrm{i}A_\mu$, og $F_{\mu\nu} = \partial_\nu A_\mu - \partial_\mu A_\nu$. Her er e^2 og κ^2 konstanter, mens A^μ og ϕ er de dynamiske feltene (begge reelle). Vi bruker naturlige enheter, $\hbar = c = 1$.

a) Lagrangetettheten (1) er invariant under *globale* fasetransformasjoner, $\phi \to \phi + \alpha$, der α er konstant. Hva blir den tilhørende konserverte Nöther-strømmen?

Det lønner seg å først forenkle uttrykket

$$\kappa^2 \left(D_\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \right)^* \left(D^\mu \mathrm{e}^{\mathrm{i}\phi} \right) = \kappa^2 \left(\partial_\mu \phi + A_\mu \right) \left(\partial^\mu \phi + A^\mu \right).$$

Vi finner da Nöther-strømmen

$$j^\mu = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} \delta\phi = 2\kappa^2 \left(\partial^\mu \phi + A^\mu \right), \tag{2}$$

der vi har valgt å sette $\delta\phi = 1$. Alle svar proporsjonal med denne er selvsagt også en korrekt løsning.

b) Vis at Lagrangetettheten (1) er invariant under *lokale* fasetransformasjoner, $\phi(x) \to \phi(x) + \alpha(x)$, hvis man gjør en tilhørende transformasjon av A^μ-feltet. Skriv ned denne transformasjonen.

Vi oppnår lokal faseinvarians (lokal gauge invarians) dersom $\partial_\mu \phi' + A'_\mu = \partial_\mu \phi + A_\mu$, dvs. dersom

$$A'_\mu(x) = A_\mu(x) - \partial_\mu \alpha(x), \quad A'^\mu(x) = A^\mu(x) - \partial^\mu \alpha(x). \tag{3}$$

c) Hva blir de kanonisk konjugerte impulstetthetene Π_ϕ og Π_μ til henholdsvis feltene ϕ og A^μ?

Her kan det lønne seg å skrive $-\frac{1}{4e^2}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} = \frac{1}{2e^2}\left(\boldsymbol{E}^2 - \boldsymbol{B}^2\right)$, der $\boldsymbol{E} = -(\dot{\boldsymbol{A}} + \nabla A^0)$ og $\boldsymbol{B} = \nabla \times \boldsymbol{A}$. Vi finner da

$$\begin{aligned} \Pi_\phi &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = 2\kappa^2\left(\dot{\phi} + A^0\right), &(4)\\ \Pi_0 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^0} = 0, &(5)\\ \Pi_i &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^i} = \frac{1}{e^2}\left(\dot{A}^i + \partial_i A^0\right) = -\frac{1}{e^2}E^i. &(6)\end{aligned}$$

d) Finn Euler-Lagrange ligningene for A^μ og ϕ.

Vi finner ligningene

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu \phi)} = 2\kappa^2 \partial_\mu\left(\partial^\mu \phi + A^\mu\right) = 0. \tag{7}$$

Dette er identisk med betingelsen om at Nöther-strømmen j^μ skal være konservert. Videre

$$\partial_\mu \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial(\partial_\mu A_\nu)} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial A_\nu},$$

som blir

$$\frac{1}{e^2}\partial_\mu\left(\partial^\nu A^\mu - \partial^\mu A^\nu\right) \equiv \frac{1}{e^2}\partial_\mu F^{\mu\nu} = 2\kappa^2\left(\partial^\nu \phi + A^\nu\right). \tag{8}$$

Dette er halvparten av Maxwells ligninger (de med kildeledd),

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = J^\nu,$$

med en strøm $J^\nu = e^2 j^\nu$.

e) Vis at man kan gjøre en gauge-transformasjon slik at ϕ-feltet elimineres fullstendig fra Lagrangetettheten (1). Vis at bevegelsesligningen for A^μ i dette tilfellet kan reduseres til Klein-Gordon ligningen,

$$\left(\Box + M^2\right)A^\mu = 0, \tag{9}$$

og finn M^2 uttrykt ved parametrene i Lagrangetettheten.

Ved å velge en lokal fasetransformasjon med $\alpha(x) = -\phi(x)$ forsvinner ϕ helt fra Lagrangetettheten $\mathcal{L}$. Med $\phi = 0$ reduserer ligningene (7,8) over til

$$2\kappa^2\partial_\mu A^\mu = 0, \quad \left(\frac{1}{e^2}\Box + 2\kappa^2\right)A^\nu = \frac{1}{e^2}\partial^\nu\left(\partial_\mu A^\mu\right), \tag{10}$$

som kombinert gir ligning (9) med $M^2 = 2e^2\kappa^2$.

f) Vi antar nå at Lagrangetettheten (1) definerer en modell i D rom-tid dimensjoner, slik at virkningen $S = \int \mathrm{d}^D x\, \mathcal{L}$ er dimensjonsløs. Hvilke massedimensjoner har da feltene A_μ og ϕ? Og parametrene e^2 og κ^2?

Fra uttrykket for kovariant derivert, $D_\mu = \partial_\mu + A_\mu$, ser man at ∂_μ og A_μ må ha samme dimensjon, nemlig invers lengde (som er det samme som masse i naturlige enheter).

Og siden ϕ opptrer i en eksponensialfunksjon må dette feltet være dimensjonsløst (alle potenser av ϕ må ha samme dimensjon). Altså finner vi at

$$D\{A_\mu\} = 1, \quad D\{F_{\mu\nu}\} = D\{A_\mu\} + D\{\partial_\mu\} = 2, \quad D\{\phi\} = 0. \tag{11}$$

Videre, siden $D\{\mathrm{d}^D x\} = -D$ må vi ha $D\{\mathcal{L}\} = D$, og derfor

$$D\{e^2\} = 4 - D, \quad D\{\kappa^2\} = D - 2. \tag{12}$$

Dette er konsistent med at $D\{e^2\kappa^2\} = D\{M^2\} = 2$.

g) Anta nå at $D = 2$, dvs at $x = (t, z)$, og at vi har gjort den gaugetransformasjonen som gjør at (9) er gyldig. Finn i dette tilfellet Fourier-utviklingen av feltet $A^\mu(x)$, uttrykt ved bl.a. kreasjons- og annihilasjons-operatorer og polarisasjonsvektorer ($a^\dagger(k)$, $a(k)$, $e^\mu(k)$).

I et endelig volum V (som her blir en lengde L) har vi Fourierutviklingen

$$A^\mu(x) = \sum_k \frac{1}{\sqrt{2\omega_k V}} \left[a(k)\, e^\mu(k)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + a^\dagger(k)\, e^{\mu *}(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \right], \tag{13}$$

der $\omega_k = k^0 = \sqrt{k^2 + M^2}$. Det vesentlige her er at det bare finnes én polariasjonsvektor i utviklingen (selv om A^μ-feltet har to komponenter, A^0 og A^1). Den tilsvarende uendelig volum versjonen av (13) er

$$A^\mu(x) = \int \frac{\mathrm{d}k}{(2\pi)^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{2\omega_k}} \left[a(k)\, e^\mu(k)\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}kx} + a^\dagger(k)\, e^{\mu *}(k)\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}kx} \right]. \tag{14}$$

Kommentar: Her ble det ikke spurt om noe eksplisitt uttrykk for polarisasjonsvektoren $e^\mu(k)$, men i en mer fullstendig analyse av modellen hører dette med. Betingelsen $\partial_\mu A^\mu = 0$ medfører at vi må ha $k_\mu e^\mu(k) = 0$, dvs. $e^\mu(k) = N(k)\,(k, \omega_k)$, der $N(k)$ er en normaliseringskonstant som må velges slik at vi får riktig kommuteringsregel mellom $\dot{A}^1(t, z)$ og $A^1(t, z')$. Da må vi først bestemme hva som er *riktig kommuteringsregel*. Siden $\Pi_0 = 0$ er ikke A^0 noen uavhengig dynamisk variabel, men kan løses ut fra *føringsbetingelsen* (Euler-Lagrange ligningen for A^0),

$$\left(-\partial_z^2 + M^2\right) A^0 = \partial_z \dot{A}^1, \quad \text{dvs. } A^0 = \left(-\partial_z^2 + M^2\right)^{-1} \partial_z \dot{A}^1,$$

og derfra finner vi at

$$E = -\left(\dot{A}^1 + \partial_z A^0\right) = -\left[1 + \left(-\partial_z^2 + M^2\right)^{-1} \partial_z^2\right] \dot{A}^1 = -M^2 \left(-\partial_z^2 + M^2\right)^{-1} \dot{A}^1. \tag{15}$$

Fra dette finner vi at

$$\begin{aligned} \Pi_1 &= \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{A}^1} = \frac{\partial}{\partial \dot{A}^1} \left(\frac{1}{2e^2} E^2 + \kappa^2 A^{0\,2} \right) = \left(\frac{1}{e^2} E \frac{\partial E}{\partial \dot{A}^1} + 2\kappa^2 A^0 \frac{\partial A^0}{\partial \dot{A}^1} \right) \\ &= \frac{1}{e^2} \left[M^4 \left(-\partial_z^2 + M^2\right)^{-2} - M^2 \left(-\partial_z^2 + M^2\right)^{-2} \partial_z^2 \right] \dot{A}^1 = \frac{M^2}{e^2} \left(-\partial_z^2 + M^2\right) \dot{A}^1. \end{aligned} \tag{16}$$

Her har vi ved andre likhet bare tatt med de leddene i $\mathcal{L}$ som avhenger av $\dot{A}^1$. Uttrykkene over må tolkes i forbindelse med integrasjon, slik at man ved en delvis integrasjon kan omskrive $\mathcal{F}(x)\,\partial_z = -\partial_z \mathcal{F}(x)$. Fra den kanoniske kommutatorrelasjonen $\left[\Pi_1(t, z), A^1(t, z')\right] = -\mathrm{i}\delta(z - z')$ følger det derfor at vi skal ha

$$\left[\dot{A}^1(t, z), A^1(t, z')\right] = -\frac{\mathrm{i}\, e^2}{M^2} \left(-\partial_z^2 + M^2\right) \delta(z - z') = -\frac{\mathrm{i}\, e^2}{M^2} \int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi} \left(k^2 + M^2\right) \mathrm{e}^{\mathrm{i}k(z - z')}. \tag{17}$$

Vi sammenligner dette med hva vi finner fra Fourier-utviklingen (14),

$$\left[\dot{A}^1(t,z), A^1(t,z')\right] = -\mathrm{i}\int \frac{\mathrm{d}k}{2\pi}\, e^1(k)\, e^{1*}(k)\, \frac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{\mathrm{i}k(z-z')} + \mathrm{e}^{-\mathrm{i}k(z-z')}\right). \tag{18}$$

Ved sammenligning av de to siste ligningene finner vi betingelsen

$$e^1(k)e^{1*}(k) = |N(k)|^2\omega_k^2 = \frac{e^2\,(k^2+M^2)}{M^2},$$

dvs. at $N(k) = e/M$ eller

$$e^\mu(k) = \frac{e}{M}\,(k, \omega_k) \tag{19}$$

modulo en fasefaktor. Vi har relasjonen $e^\mu(k)\, e^\nu(k) = -\left(\eta^{\mu\nu} - k^\mu k^\nu/M^2\right)$, der $k^0 = \omega_k$ og μ, ν tar verdiene 0 og 1.

Oppgave 2. Prosesser i *QED*

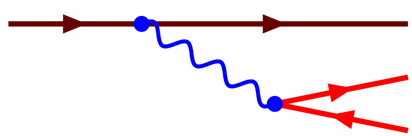
Tegn, i de tilfeller dette er mulig i kvante-elektrodynamikk (*QED*), Feynman diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for prosessene nedenfor. For noen tilfeller eksisterer det Feynman diagram, men prosessen er likevel ikke mulig i vakuum. Angi slike tilfeller, og forklar kort hva som gjør prosessen umulig.

a) $\mu^- \to e^- e^- e^+$

Denne prosessen bryter bevaring av elektrontall og myontall, og er derfor umulig i *QED*.

b) $\mu^- \to \mu^- e^- e^+$

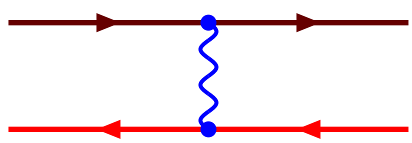
Laveste ordens Feynman diagram for denne prosessen er



Prosessen er likevel ikke mulig i vakuum fordi den bryter bevaring av firerimpuls.

c) $\mu^- e^+ \to \mu^- e^+$

Laveste ordens Feynman diagram for denne prosessen er

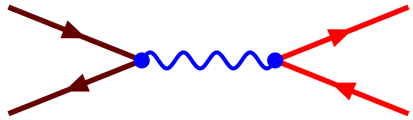


d) $\mu^- e^+ \to \mu^+ e^-$

Denne prosessen bryter bevaring av elektrontall og myontall, og er derfor umulig i *QED*.

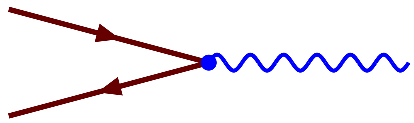
e) $\mu^-\mu^+ \to e^+e^-$

Laveste ordens Feynman diagram for denne prosessen er



f) $\mu^+\mu^- \to \gamma$

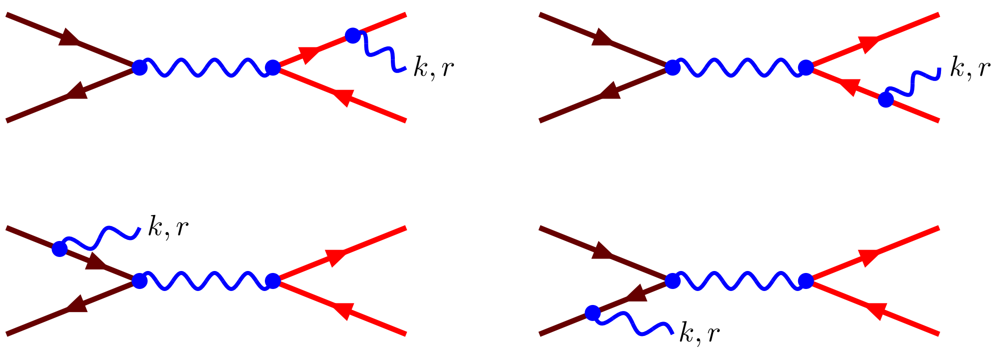
Laveste ordens Feynman diagram for denne prosessen er



Prosessen er likevel ikke mulig i vakuum fordi den bryter bevaring av firerimpuls.

g) $\mu^+\mu^- \to e^+e^-\gamma$

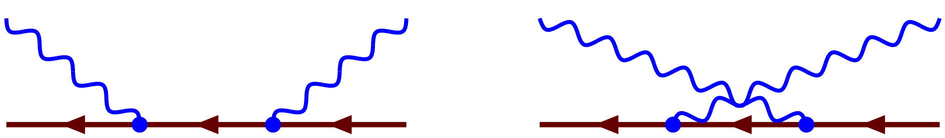
Laveste ordens Feynman diagram for denne prosessen er



Som indikert skal det utstrålte fotonet ha samme kvantetall i alle diagrammene.

h) $\mu^+\gamma \to \mu^+\gamma$

Laveste ordens Feynman diagram for denne prosessen er



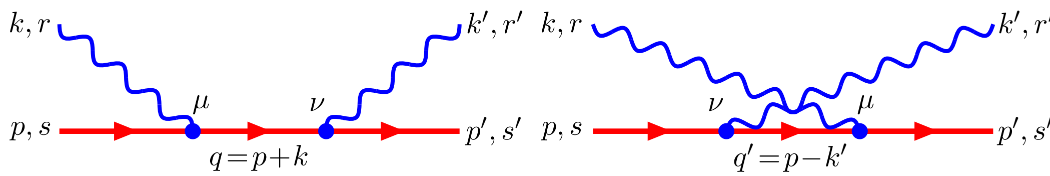
Oppgave 3. Compton spredning

I denne oppgaven skal du se litt på Compton-spredning, $e^-\gamma \to e^-\gamma$.

a) Tegn Feynman-diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for denne prosessen. Påfør diagrammene alle nødvendige impulser og indekser.

Anta at det innkommende elektronet (resp. fotonet) har kvantetall p, s (resp. k, r), og at det utgående elektronet (resp. fotonet) har kvantetall p', s' (resp. k', r'). Innfør videre $q = p + k$ og $q' = p - k'$.

Laveste ordens Feynman diagram for denne prosessen er



(a) (b)

b) Bruk Feynman-reglene i vedlegget til å skrive ned de tilhørende algebraiske bidragene til spredningsamplituden $\mathcal{M}_{fi}$.

Vi finner $\mathcal{M}_{fi} = \mathcal{M}_{fi}^{(\mathbf{a})} + \mathcal{M}_{fi}^{(\mathbf{b})}$, med

$$-\mathrm{i}\mathcal{M}_{fi}^{(\mathbf{a})} = \frac{-\mathrm{i}e^2}{2pk}\left[\,\bar{u}(p')\,\not{e}'\,(\not{q} + m_e)\,\not{e}\,u(p)\,\right], \tag{20}$$

$$-\mathrm{i}\mathcal{M}_{fi}^{(\mathbf{b})} = \frac{\mathrm{i}e^2}{2pk'}\left[\,\bar{u}(p')\,\not{e}\,(\not{q}' + m_e)\,\not{e}'\,u(p)\,\right]. \tag{21}$$

Her har vi brukt at $q^2 - m_e^2 = 2pk$ og ${q'}^2 - m_e^2 = -2pk'$. Videre er $\not{e} = \gamma_\mu\, e_r^\mu(k)$ og $\not{e}' = \gamma_\nu\, e_{r'}^\nu(k')$ (vi antar at begge polarisasjonsvektorene er reelle).

c) Anta at det innkommende elektronet er i ro, $p = (m_e, 0, 0, 0)$, og at $k = (\omega, 0, 0, \omega)$, $k' = (\omega', \omega'\,\hat{n})$. Bestem ω' som funksjon av ω og spredningsvinkelen ϑ ($\cos\vartheta = \hat{n}\cdot\hat{e}_z$).

Bevaring av firerimpuls sier at $p + k = p' + k'$, som ved kvadrering gir at $p^2 + 2pk + k^2 = {p'}^2 + 2p'k' + {k'}^2$, eller at $pk = p'k'$ siden $p^2 = {p'}^2$ og $k^2 = {k'}^2$. Ved å sette inn $p' = p + k - k'$ og bruke at ${k'}^2 = 0$ finner vi $pk = pk' + kk'$. Evaluering av skalarproduktene i hvilesystemet til det innkommende elektronet gir så $m_e\omega = m_e\omega' + \omega\omega'(1 - \cos\vartheta)$, som løst ut for ω' gir

$$\omega' = \frac{\omega}{1 + (\omega/m_e)(1 - \cos\vartheta)} = \frac{\omega}{1 + 2(\omega/m_e)\sin^2\vartheta/2}. \tag{22}$$

d) Skriv ned uttrykket for amplitudekvadratet $\overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2}$, midlet over spinnet til det innkommende elektronet og summert over spinnet til det utgående elektronet.

Vi får

$$\overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2} = \frac{e^4}{4}\left[\frac{Y^{(\mathbf{aa})}}{(pk)^2} - \frac{Y^{(\mathbf{ab})} + Y^{(\mathbf{ba})}}{(pk)(pk')} + \frac{Y^{(\mathbf{bb})}}{(pk')^2}\right], \tag{23}$$

der

$$
\begin{aligned}
Y^{(\mathbf{aa})} &= \sum_{ss'} \left[\bar{u}(p')\, \not{e}'\, (\not{q} + m_e)\, \not{e}\, u(p) \right] \left[\bar{u}(p')\, \not{e}'\, (\not{q} + m_e)\, \not{e}\, u(p) \right]^* \\
&= \mathrm{Tr} \left\{ \not{e}'\, (\not{q} + m_e)\, \not{e}\, (\not{p} + m_e)\, \not{e}\, (\not{q} + m_e)\, \not{e}'\, (\not{p}' + m_e) \right\}, \qquad (24) \\
Y^{(\mathbf{ab})} &= \sum_{ss'} \left[\bar{u}(p')\, \not{e}'\, (\not{q} + m_e)\, \not{e}\, u(p) \right] \left[\bar{u}(p')\, \not{e}\, (\not{q}' + m_e)\, \not{e}'\, u(p) \right]^* \\
&= \mathrm{Tr} \left\{ \not{e}'\, (\not{q} + m_e)\, \not{e}\, (\not{p} + m_e)\, \not{e}'\, (\not{q}' + m_e)\, \not{e}\, (\not{p} + m_e) \right\}, \qquad (25) \\
Y^{(\mathbf{ba})} &= \sum_{ss'} \left[\bar{u}(p')\, \not{e}\, (\not{q}' + m_e)\, \not{e}'\, u(p) \right] \left[\bar{u}(p')\, \not{e}'\, (\not{q} + m_e)\, \not{e}\, u(p) \right]^* \\
&= \mathrm{Tr} \left\{ \not{e}\, (\not{q}' + m_e)\, \not{e}'\, (\not{p} + m_e)\, \not{e}\, (\not{q} + m_e)\, \not{e}'\, (\not{p}' + m_e) \right\}, \qquad (26) \\
Y^{(\mathbf{bb})} &= \sum_{ss'} \left[\bar{u}(p')\, \not{e}\, (\not{q}' + m_e)\, \not{e}'\, u(p) \right] \left[\bar{u}(p')\, \not{e}\, (\not{q}' + m_e)\, \not{e}'\, u(p) \right]^* \\
&= \mathrm{Tr} \left\{ \not{e}\, (\not{q}' + m_e)\, \not{e}'\, (\not{p} + m_e)\, \not{e}'\, (\not{q}' + m_e)\, \not{e}\, (\not{p}' + m_e) \right\}. \qquad (27)
\end{aligned}
$$

e) For eksplisitt utregning av $\overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2}$ må man bl.a. beregne sporet

$$
Y = \mathrm{Tr} \left\{ \not{e}'\, \not{k}\, \not{e}\, (\not{p} + m)\, \not{e}\, \not{k}\, \not{e}'\, (\not{p}' + m) \right\}, \qquad (28)
$$

når polarisasjonsvektorene e^μ, e'^μ for henholdsvis innkommende og utgående foton, er valgt reelle. Beregn Y. Du kan anta at $pe = pe' = ke = k'e' = 0$ (Coulomb gauge), og bruke at $e^2 = e'^2 = -1$ og $k^2 = k'^2 = 0$.

Vi omskriver først

$$
\not{e}\, (\not{p} + m)\, \not{e} = \not{e}\, \not{e}\, (-\not{p} + m) = (\not{p} - m),
$$

etter bruk av at $\not{p}$ og $\not{e}$ antikommuterer siden $pe = 0$, og at $\not{e}\,\not{e} = e^2 = -1$. Dernest får vi ved å antikommutere $\not{k}$ mot høyre

$$
\not{k}\, (\not{p} - m)\, \not{k} = \{\not{k}, \not{p}\}\, \not{k} - (\not{p} + m)\, \not{k}\, \not{k} = 2pk\, \not{k},
$$

siden $\not{k}\,\not{k} = k^2 = 0$. Ved dette har vi fått redusert uttrykket til

$$
\begin{aligned}
Y &= 2(pk)\mathrm{Tr} \left\{ \not{e}'\, \not{k}\, \not{e}'\, (\not{p}' + m) \right\} = 8(pk) \left[2(ke')(p'e') + (p'k) \right] \\
&= 16(pk)(ke')^2 + 8(pk)(pk'). \qquad (29)
\end{aligned}
$$

Her har vi evaluert sporet ved bruk av standard uttrykk for spor over fire γ-matriser og brukt at $e'^2 = -1$. Ved siste likhet har vi brukt at $p'e' = (p + k - k')e' = ke'$, og at $p'k = pk'$ (fra ligningen $(p - k')^2 = (p' - k)^2$).

Kommentar: Ligning (24) kan reduseres til (28) ved å skrive $(\not{q} + m_e) = (\not{p} + \not{k} + m_e)$ og bruke at

$$
(\not{p} + m_e)\, \not{e}\, (\not{p} + m_e) = \not{e}\, (-\not{p} + m_e)(\not{p} + m_e) = \not{e}\, (-p^2 + m_e^2) = 0.
$$