**NTNU** **Institutt for fysikk**

Faglig kontakt under eksamen:
Professor Kåre Olaussen
Telefon: 9 36 52 eller 45 43 71 70

## Eksamen i FY8307 KVANTEFELTTEORI I

Onsdag 13. desember 2006
09:00–13:00

Tillatte hjelpemidler: Alternativ **C**

Typegodkjent kalkulator, med tomt minne (i henhold til liste utarbeidet av NTNU).
K. Rottman: *Matematisk formelsamling* (alle språkutgaver).
Schaum's Outline Series: *Mathematical Handbook of Formulas and Tables.*

Sensur legges ut på fagets webside, `http://web.phys.ntnu.no/~kolausen/FY8307/`, såsnart den er klar

Dette oppgavesettet er på 3 sider, pluss et vedlegg på 2 sider.

### Oppgave 1. Prosesser i *QED*

Tegn, i de tilfeller dette er mulig i kvante-elektrodynamikk (*QED*), Feynman diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for prosessene nedenfor. For noen tilfeller eksisterer det Feynman diagram, men prosessen er likevel ikke mulig i vakuum. Angi slike tilfeller, og forklar kort hva som gjør prosessen umulig.

**a)** $e^-\mu^+ \to e^-\mu^+$

**b)** $e^-\mu^+ \to e^+\mu^-$

**c)** $\mu^- \to e^-\gamma$

**d)** $\mu^- \to \mu^-e^-e^+$

**e)** $\gamma\gamma \to \gamma$

**f)** $\gamma\gamma \to \gamma\gamma$

**Oppgave 2. Fotoproduksjon av elektron-positron par**

I denne oppgaven skal du se på prosessen, $\gamma\gamma \to e^+e^-$. Betrakt prosessen fra massesenter systemet, og regn med naturlige enheter $\hbar = c = 1$ der dette er enklest.

**a)** Tegn Feynman-diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for denne prosessen. Påfør diagrammene alle nødvendige impulser og indekser.

Anta at de innkommende fotonene har kvantetall $k_1, r_1$ og $k_2, r_2$, og at det utgående elektronet (resp. positronet) har kvantetall $p_1, s_1$ (resp. $p_2, s_2$). Innfør videre $q = p_1 - k_1$ og $q' = p_1 - k_2$.

**b)** Bruk Feynman-reglene i vedlegget til å skrive ned de tilhørende algebraiske bidragene til spredningsamplituden $\mathcal{M}_{fi}$.

**c)** Bruk dimensjonsanalyse og kvalitativ informasjon fra Feynman diagrammene til å anslå størrelsesorden til det totale spredningstverrsnittet i det spesialtilfellet at hvert foton har energi $E = 2m_e$. Dvs., bestem hvilken algebraisk kombinasjon av fysiske parametre tverrsnittet må avhenge av, og regn ut størrelsen på denne kombinasjonen i vanlige SI-enheter.

**Oppgitt:** $m_e = 0.511\ \mathrm{MeV/c^2}$
$\hbar = 1.054\,572\,66 \times 10^{-34}\ \mathrm{J\,s} = 6.582\,122\,0 \times 10^{-16}\,\mathrm{eV\,s}$, $c = 299\,792\,458\ \mathrm{m\,s^{-1}}$, $e = 1.602\,177\,33 \times 10^{-19}$ C, $\alpha = e^2/(4\pi\varepsilon_0\hbar c) = 1/137.035\,9895$.

**d)** Det upolariserte tverrsnittet framkommer ved at vi midler over spinntilstandene $(r_1, r_2)$ til de innkommende fotonene, og summerer over spinntilstandene $(s_1, s_2)$ til det utgående elektron-positron paret. Amplitudekvadratet $\sum_{r_1 r_2 s_1 s_2} |\mathcal{M}_{fi}|^2$ kan da uttrykkes som en sum av spor over $\gamma$-matriser (med prefaktorer).

Finn denne summen. Du trenger foreløbig ikke å regne ut sporene.

**e)** Anta nå at energien $E$ til hvert innkommende foton er mye større enn hvileenergien til elektronet, $E \gg m_e$, slik at man kan sette $m_e = 0$ i alle uttrykk. Finn i dette grensetilfellet eksplisitte uttrykk for alle sporene som inngår i $\sum_{rsr's'} |\mathcal{M}_{fi}|^2$ fra forrige punkt.

**f)** Finn i grensetilfellet $E \gg m_e$ et eksplisitt uttrykk for det differensielle parproduksjons tverrsnittet $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{par}}$. Uttrykk svaret ved energien $E$ og vinkelen $\vartheta$ mellom et av de innkommende fotonene og det utgående elektronet.

**Oppgave 3. Majorana fermioner**

I denne oppgaven skal du se litt på modellen beskrevet av den lineære feltligningen

$$\mathrm{i}\sigma^\mu\,\partial_\mu L_\alpha - \mathrm{i}M\sigma^2_{\alpha\beta}L^*_\beta = 0, \tag{1}$$

der $L_\alpha$ er en tokomponent spinor, og $\sigma^\mu = (1, -\boldsymbol{\sigma})$. De eksplisitte uttrykkene for Pauli-matrisene $\boldsymbol{\sigma}$ står i vedlegget. For å finne planbølgeløsningene til denne ligningene kan det være hensiktsmessig å innføre egenspinorene $\chi^{(r)}_\alpha(\hat{p})$, der

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})_{\alpha\beta}\,\chi^{(r)}_\beta(\hat{p}) = r|\boldsymbol{p}|\,\chi^{(r)}_\alpha(\hat{p}), \quad r = \pm 1. \tag{2}$$

**a)** Bruk det faktum at $\sigma^2$ er imaginær og antikommuterer med de reelle matrisene $\sigma^1$, $\sigma^2$ til å vise at man kan velge $\chi^{(-)}(\hat{p}) = \mathrm{i}\sigma^2\chi^{(+)}(\hat{p})^*$.

**b)** Gitt valget over, hva blir da $\mathrm{i}\sigma^2\chi^{(-)}(\hat{p})^*$?
**Tips:** Husk at $\sigma^2\sigma^2 = 1$.

**c)** Gjør nå (planbølge) ansatsen

$$L(x) = A_+(p)\chi^{(+)}(\hat{p})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} + B_-(p)\chi^{(-)}(\hat{p})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}px} \tag{3}$$

der koeffisientene $A_+(p)$, $B_-(p)$ antas å være reelle. Bruk så ligning (1) til å finne et lineært homogent ligningssystem for disse koeffisientene.
**Tips:** Bruk at en ligning av formen

$$\mathcal{C}_+\,\chi^{(+)}(\hat{p})\,\mathrm{e}^{-ikx} + \mathcal{C}_-\,\chi^{(-)}(\hat{p})\,\mathrm{e}^{ikx} = 0$$

bare kan være oppfylt dersom $\mathcal{C}_+ = \mathcal{C}_- = 0$.

**d)** Hvilken (dispersjons)relasjon må $p^0$ oppfylle for at ligningssystemet fra forrige punkt skal ha løsning forskjellig fra null?

**e)** Anta en løsning der $p^0 > 0$ oppfyller dispersjonsrelasjonen, og bestem forholdet mellom $B_-$ og $A_+$ i løsningsansatsen (3).

**f)** Skissér hvordan du ville gå fram for å finne den generelle løsningen til feltligningen (1), uttrykt ved planbølger, og for å kvantisere dette feltet.

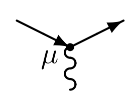
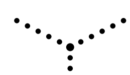
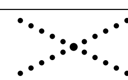
# 1 Sammenheng mellom amplitude $\mathcal{M}_{fi}$ og tverrsnitt $\sigma$

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{|\mathcal{M}_{fi}|^2}{4\sqrt{(p_1\cdot p_2)^2 - m_1^2\, m_2^2}}\,(2\pi)^4\,\delta^{(4)}(p_1 + p_2 - \sum_f p'_f\,)\prod_{f=1}^{n}\frac{\mathrm{d}^3 p'_f}{(2\pi)^3\, 2E'_f} \tag{4}$$

$$\mathrm{d}\sigma = \frac{1}{64\pi^2\,(p_1+p_2)^2}\,\frac{|\boldsymbol{p}_f|}{|\boldsymbol{p}_i|}\,|\mathcal{M}_{fi}|^2\ \mathrm{d}\Omega \qquad \text{for } n = 2 \text{ i massesenter systemet} \tag{5}$$

# 2 Noen Feynmanregler for $-\mathrm{i}\mathcal{M}_{fi}$:

| 1. Utgående partikler | | | 2. Innkommende partikler | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Type partikler | Grafisk symbol | Algebraisk uttrykk | Type partikler | Grafisk symbol | Algebraisk uttrykk |
| $e^-, \mu^-, \cdots$ | $\bullet\!\longrightarrow\ p, s$ | $\overline{u}(p,s)$ | $e^-, \mu^-, \cdots$ | $p, s \longrightarrow\!\bullet$ | $u(p,s)$ |
| $e^+, \mu^+, \cdots$ | $\bullet\!\longleftarrow\ p, s$ | $v(p,s)$ | $e^+, \mu^+, \cdots$ | $p, s \longleftarrow\!\bullet$ | $\overline{v}(p,s)$ |
| $\gamma$ (foton) | $\bullet\!\sim\!\sim\ k, r$ | $e_\mu(k,r)^*$ | $\gamma$ (foton) | $k, r\ \sim\!\sim\!\bullet$ | $e_\mu(k,r)$ |
| Uladet spinn–0 | $\bullet\cdots\cdots\ k$ | 1 | Uladet spinn–0 | $k\ \cdots\cdots\bullet$ | 1 |

| 3. Propagatorer | | | 4. Vekselvirkningsknuter | | |
|---|---|---|---|---|---|
| Type partikler | Grafisk symbol | Algebraisk uttrykk | V.virkning $\mathcal{L}_{\text{int}}$ | Grafisk symbol | Algebraisk uttrykk |
| $e^\pm, \mu^\pm, \cdots$ | $\bullet\!\xrightarrow{\ p\ }\!\bullet$ | $\dfrac{\mathrm{i}(\not p + m)}{p^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}$ | $e\overline{\psi}\gamma^\mu\psi A_\mu$ |  | $\mathrm{i}e\gamma^\mu$ |
| $\gamma$ (foton) | $\underset{\mu}{\bullet}\!\overset{k}{\sim\!\sim\!\sim}\!\bullet\ \nu$ | $\dfrac{-\mathrm{i}\eta_{\mu\nu}}{k^2 + \mathrm{i}\epsilon}$ | $-\dfrac{1}{3!}\mu\varphi^3$ |  | $-\mathrm{i}\mu$ |
| Uladet spinn–0 | $\bullet\cdots\overset{k}{\cdot}\cdots\bullet$ | $\dfrac{\mathrm{i}}{k^2 - m^2 + \mathrm{i}\epsilon}$ | $-\dfrac{1}{4!}\lambda\varphi^4$ |  | $-\mathrm{i}\lambda$ |

i) Konservering av firer-impuls i hver knute.

ii) Integrasjon $\int \frac{d^4q}{(2\pi)^4}$ over hver ubestemt impuls.

iii) Faktor $-1$ for hver lukket fermionsløyfe.

iv) Relativt minustegn mellom diagrammer som adskiller seg ved ombytte av to fermioner.

v) Kombinatorisk faktor $1/S$, der $S$ er diagrammets symmetritall.

## 3 Noen fullstendighetsrelasjoner

Dirac partikler, Dirac antipartikler, og fotoner

$$\sum_{s=1}^{2} u(p,s)\,\overline{u}(p,s) = \not{p} + m, \qquad \sum_{s=1}^{2} v(p,s)\,\overline{v}(p,s) = \not{p} - m \tag{6}$$

$$\sum_{r=1}^{2} e_\mu(k,r)\, e^*_\nu(k,r) = -\eta_{\mu\nu} + \text{irrelevante ledd} \tag{7}$$

## 4 Dirac's $\gamma$-matriser

### 4.1 Standardrepresentasjonen

$$\gamma^0 = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}, \qquad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \boldsymbol{\sigma} \\ -\boldsymbol{\sigma} & 0 \end{pmatrix}, \tag{8}$$

der $I$ er en $2\times 2$ enhetsmatrise, og $\boldsymbol{\sigma}$ er Pauli-matrisene,

$$\sigma^1 \equiv \sigma^x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^2 \equiv \sigma^y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}, \quad \sigma^3 \equiv \sigma^z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}. \tag{9}$$

som oppfyller den algebraiske relasjonen

$$\sigma^i\,\sigma^j = \delta^{ij} + \mathrm{i}\varepsilon^{ijk}\,\sigma^k, \text{ dvs. at } (\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{a})\,(\boldsymbol{\sigma}\cdot\mathbf{b}) = \mathbf{a}\cdot\mathbf{b} + \mathrm{i}\,\boldsymbol{\sigma}\cdot(\mathbf{a}\times\mathbf{b}) \tag{10}$$

### 4.2 Algebraiske relasjoner

$$\{\gamma^\mu, \gamma^\nu\} = 2\,\eta^{\mu\nu} \quad \Longrightarrow \not{p}\,\not{p} = p^2 \tag{11}$$

$$\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma_\mu = -2\,\gamma^\nu \quad \Longrightarrow \gamma_\mu\,\not{p}\,\gamma^\mu = -2\,\not{p} \tag{12}$$

$$\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda\,\gamma_\mu = 4\,\eta^{\nu\lambda} \quad \Longrightarrow \gamma_\mu\,\not{p}\,\not{q}\,\gamma^\mu = 4\,(pq) \tag{13}$$

$$\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda\,\gamma^\sigma\,\gamma_\mu = -2\,\gamma^\sigma\,\gamma^\lambda\,\gamma^\nu \quad \Longrightarrow \gamma_\mu\,\not{p}\,\not{q}\,\not{r}\,\gamma^\mu = -2\not{r}\,\not{q}\,\not{p} \tag{14}$$

### 4.3 Noen spor-uttrykk

$$\mathrm{Tr}\,1 = 4 \tag{15}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu = 0 \tag{16}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu = 4\,\eta^{\mu\nu} \quad \Longrightarrow \mathrm{Tr}\,\not{p}\,\not{q} = 4\,(pq) \tag{17}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda = 0 \tag{18}$$

$$\mathrm{Tr}\,\gamma^\mu\,\gamma^\nu\,\gamma^\lambda\,\gamma^\sigma = 4\left(\eta^{\mu\nu}\,\eta^{\lambda\sigma} - \eta^{\mu\lambda}\,\eta^{\nu\sigma} + \eta^{\mu\sigma}\,\eta^{\nu\lambda}\right) \tag{19}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Tr}\,\not{p}\,\not{q}\,\not{r}\,\not{s} = 4(pq)(rs) - 4(pr)(qs) + 4(ps)(qr)$$