NTNU

Institutt for fysikk

Fakultet for fysikk, informatikk og matematikk

Løsningsforslag til eksamen i FY8307 KVANTEFELTTEORI I

Onsdag 13. desember 2006

Dette løsningsforslaget er på 5 sider.

Oppgave 1. Prosesser i *QED*

Tegn, i de tilfeller dette er mulig i kvante-elektrodynamikk (QED), Feynman diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for prosessene nedenfor. For noen tilfeller eksisterer det Feynman diagram, men prosessen er likevel ikke mulig i vakuum. Angi slike tilfeller, og forklar kort hva som gjør prosessen umulig.

a) $e^- \mu^+ \rightarrow e^- \mu^+$

b) $e^- \mu^+ \rightarrow e^+ \mu^-$

Umulig i QED. Bryter konservering av elektrontall og myontall.

c) $\mu^- \rightarrow e^- \gamma$

Umulig i QED. Bryter konservering av elektrontall og myontall.

d) $\mu^- \rightarrow \mu^- e^- e^+$

Bryter konservering av firerimpuls.

e) $\gamma\gamma \rightarrow \gamma$

Bryter konservering av firerimpuls og ladningskonjugasjon invarians (Furry's teorem).

f) $\gamma\gamma \rightarrow \gamma\gamma$

Oppgave 2. Fotoproduksjon av elektron-positron par

I denne oppgaven skal du se på prosessen, $\gamma\gamma \rightarrow e^+ e^-$. Betrakt prosessen fra massesenter systemet, og regn med naturlige enheter $\hbar = c = 1$ der dette er enklest.

a) Tegn Feynman-diagrammene for alle bidrag av laveste ikke-trivielle orden for denne prosessen. Påfør diagrammene alle nødvendige impulser og indekser.

Anta at de innkommende fotonene har kvantetall k_1, r_1 og k_2, r_2, og at det utgående elektronet (resp. positronet) har kvantetall p_1, s_1 (resp. p_2, s_2). Innfør videre $q = p_1 - k_1$ og $q' = p_1 - k_2$.

b) Bruk Feynman-reglene i vedlegget til å skrive ned de tilhørende algebraiske bidragene til spredningsamplituden $\mathcal{M}_{fi}$.

$\mathcal{M}_{fi} = \mathcal{M}_{fi}^{(a)} + \mathcal{M}_{fi}^{(b)}$, med

$$-\mathrm{i}\mathcal{M}_{fi}^{(a)} = (\mathrm{ie})^2 \frac{\mathrm{i}}{q^2 - m_e^2 + \mathrm{i}\epsilon} \bar{u}(p_1, s_1)\gamma^\mu(\not{q} + m_e)\gamma^\nu v(p_2, s_2))\, e_\mu(k_1, r_1)e_\nu(k_2, r_2) \quad (1)$$

$$-\mathrm{i}\mathcal{M}_{fi}^{(b)} = (\mathrm{ie})^2 \frac{\mathrm{i}}{q'^2 - m_e^2 + \mathrm{i}\epsilon} \bar{u}(p_1, s_1)\gamma^\nu(\not{q}' + m_e)\gamma^\nu v(p_2, s_2))\, e_\mu(k_1, r_1)e_\nu(k_2, r_2) \quad (2)$$

c) Bruk dimensjonsanalyse og kvalitativ informasjon fra Feynman diagrammene til å anslå størrelsesorden til det totale spredningstverrsnittet i det spesialtilfellet at hvert foton har energi $E = 2m_e$. Dvs., bestem hvilken algebraisk kombinasjon av fysiske parametre tverrsnittet må avhenge av, og regn ut størrelsen på denne kombinasjonen i vanlige SI-enheter.

Oppgitt: $m_e = 0.511$ MeV/c^2
$\hbar = 1.054\,572\,66 \times 10^{-34}$ J s $= 6.582\,122\,0 \times 10^{-16}$ eV s, $c = 299\,792\,458$ m s^{-1}, $e = 1.602\,177\,33 \times 10^{-19}$ C, $\alpha = e^2/(4\pi\varepsilon_0\hbar c) = 1/137.035\,9895$.

Amplituden er proporsjonal med e^2, så tverrsnittet må være proporsjonal med e^4, dvs. α^2. Den eneste størrelsene i problemet som kan gi oss en lengde (eller tverrsnitt er m_e, dvs. Comptonbølgelengden $\lambda_e = 1/m_e \to \hbar/(m_e c)$. Derfor må

$$\sigma_{\text{tot}} = C \times \left(\frac{\alpha\,\hbar}{m_e c}\right)^2 = C \times 7.94 \cdot 10^{-30}\,\text{m}^2, \quad (3)$$

der C er en rent numerisk konstant av orden 1.

d) Det upolariserte tverrsnittet framkommer ved at vi midler over spinntilstandene (r_1, r_2) til de innkommende fotonene, og summerer over spinntilstandene (s_1, s_2) til det utgående elektron-positron paret. Amplitudekvadratet $\sum_{r_1 r_2 s_1 s_2} |\mathcal{M}_{fi}|^2$ kan da uttrykkes som en sum av spor over γ-matriser (med prefaktorer).

Finn denne summen. Du trenger foreløbig ikke å regne ut sporene.

Vi finner

$$\overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2} = \frac{e^4}{4}\left(\frac{T_{aa}}{(q^2 - m_e^2)^2} + \frac{(T_{ab} + T_{ba})}{(q^2 - m_e^2)(q'^2 - m_e^2)} + \frac{T_{bb}}{(q'^2 - m_e^2)^2}\right) \quad (4)$$

der faktoren 1/4 skyldes midling of helisitetene til de to fotonene, og

$$\begin{aligned}
T_{aa} &= \mathrm{Tr}\{\gamma^\mu(\not{q} + m_e)\gamma^\nu(\not{p}_2 - m_e)\gamma_\nu(\not{q} + m_e)\gamma_\mu(\not{p}_1 + m_e)\} \\
T_{ab} &= \mathrm{Tr}\left\{\gamma^\mu(\not{q} + m_e)\gamma^\nu(\not{p}_2 - m_e)\gamma_\mu(\not{q}' + m_e)\gamma_\nu(\not{p}_1 + m_e)\right\} \\
T_{ba} &= \mathrm{Tr}\left\{\gamma^\nu(\not{q}' + m_e)\gamma^\mu(\not{p}_2 - m_e)\gamma_\nu(\not{q} + m_e)\gamma_\mu(\not{p}_1 + m_e)\right\} \\
T_{bb} &= \mathrm{Tr}\left\{\gamma^\nu(\not{q}' + m_e)\gamma^\mu(\not{p}_2 - m_e)\gamma_\mu(\not{q}' + m_e)\gamma_\nu(\not{p}_1 + m_e)\right\}
\end{aligned}$$

e) Anta nå at energien E til hvert innkommende foton er mye større enn hvileenergien til elektronet, $E \gg m_e$, slik at man kan sette $m_e = 0$ i alle uttrykk. Finn i dette grensetilfellet eksplisitte uttrykk for alle sporene som inngår i $\sum_{rsr's'} |\mathcal{M}_{fi}|^2$ fra forrige punkt.

Vi finner

$$
\begin{aligned}
T_{aa} &\approx \mathrm{Tr}\,\{\gamma^\mu \not{q}\gamma^\nu \not{p}_2\gamma_\nu \not{q}\gamma_\mu \not{p}_1\} = (-2)^2\,\mathrm{Tr}\,\{\not{q}\not{p}_2\not{q}\not{p}_1\} = 32(p_1q)(p_2q) - 16\,q^2(p_1p_2),\\
T_{ab} &\approx \mathrm{Tr}\,\{\gamma^\mu \not{q}\gamma^\nu \not{p}_2\gamma_\mu \not{q}'\gamma_\nu \not{p}_1\} = (-2)\cdot 4\,(qq')\mathrm{Tr}\,\{\not{p}_2\not{p}_1\} = -32(qq')(p_1p_2),\\
T_{ba} &\approx \mathrm{Tr}\,\{\gamma^\nu \not{q}'\gamma^\mu \not{p}_2\gamma_\nu \not{q}\gamma_\mu \not{p}_1\} = (-2)\cdot 4\,(qq')\mathrm{Tr}\,\{\not{p}_2\not{p}_1\} = -32(qq')(p_1p_2),\\
T_{bb} &\approx \mathrm{Tr}\,\{\gamma^\nu \not{q}'\gamma^\mu \not{p}_2\gamma_\mu \not{q}'\gamma_\nu \not{p}_1\} = (-2)^2\,\mathrm{Tr}\,\{\not{q}'\not{p}_2\not{q}'\not{p}_1\} = 32(p_1q')(p_2q') - 16\,q'^2(p_1p_2).
\end{aligned}
$$

f) Finn i grensetilfellet $E \gg m_e$ et eksplisitt uttrykk for det differensielle parproduksjons tverrsnittet $\left(\frac{d\sigma}{d\Omega}\right)_{\text{par}}$. Uttrykk svaret ved energien E og vinkelen ϑ mellom et av de innkommende fotonene og det utgående elektronet.

Vi velger koordinater slik at

$$
\begin{aligned}
&k_1 = E\ (1,0,0,1)\,, \quad k_2 = E\ (1,0,0,-1))\,,\\
&p_1 = E\ (1,\sin\vartheta,0,\cos\vartheta)\,, \quad p_2 = E\ (1,-\sin\vartheta,0,-\cos\vartheta)\,,
\end{aligned}
$$

dvs. slik at

$$
q = p_1 - k_1 = E\ (0,\sin\vartheta,0,\cos\vartheta-1)\,, \quad q' = p_1 - k_2 = E\ (0,\sin\vartheta,0,\cos\vartheta+1)\,.
$$

Vi regner da lett ut at

$$
\begin{aligned}
&(p_1p_2) = 2E^2,\\
&(p_1q) = -(p_2q) = -E^2(1-\cos\vartheta) = -2E^2\sin^2\vartheta/2,\\
&(p_1q') = -(p_2q') = -E^2(1+\cos\vartheta) = -2E^2\cos^2\vartheta/2,\\
&q^2 = -2E^2(1-\cos\vartheta) = -4E^2\sin^2\vartheta/2,\\
&(qq') = 0,\\
&q'^2 = -2E^2(1+\cos\vartheta) = -4E^2\cos^2\vartheta/2,
\end{aligned}
$$

og videre at

$$
T_{aa} = T_{bb} = 128E^4\ \sin^2\vartheta/2\ \cos^2\vartheta/2, \quad T_{ab} = T_{ba} = 0.
$$

Fra den oppgitte sammenhengen mellom amplitudekvadrat og tverrsnitt finner vi tilslutt i den aktuelle grensen

$$
\begin{aligned}
\mathrm{d}\sigma &= \frac{1}{64\pi^2(2k_1k_2)}\,\overline{|\mathcal{M}_{fi}|^2}\,\mathrm{d}\Omega\\
&= \frac{1}{64\pi^2\cdot 4E^2}\,\frac{e^4}{4}\,\frac{1}{(-4E^2)^2}\,\left(\frac{1}{\sin^4\vartheta/2} + \frac{1}{\cos^4\vartheta/2}\right)\,128E^2\sin^2\vartheta/2\ \cos^2\vartheta/2\ \mathrm{d}\Omega\\
&= \frac{\alpha^2}{8E^2}\left(\frac{\cos^2\vartheta/2}{\sin^2\vartheta/2} + \frac{\sin^2\vartheta/2}{\cos^2\vartheta/2}\right)\,\mathrm{d}\Omega. \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Oppgave 3. Majorana fermioner

I denne oppgaven skal du se litt på modellen beskrevet av den lineære feltligningen

$$\mathrm{i}\sigma^\mu\,\partial_\mu L_\alpha - \mathrm{i}M\sigma^2_{\alpha\beta}L^*_\beta = 0, \tag{6}$$

der L_α er en tokomponent spinor, og $\sigma^\mu = (1, -\boldsymbol{\sigma})$. De eksplisitte uttrykkene for Pauli-matrisene $\boldsymbol{\sigma}$ står i vedlegget. For å finne planbølgeløsningene til denne ligningene kan det være hensiktsmessig å innføre egenspinorene $\chi^{(r)}_\alpha(\hat{p})$, der

$$(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})_{\alpha\beta}\,\chi^{(r)}_\beta(\hat{p}) = r|\boldsymbol{p}|\,\chi^{(r)}_\alpha(\hat{p}), \quad r = \pm 1. \tag{7}$$

a) Bruk det faktum at σ^2 er imaginær og antikommuterer med de reelle matrisene σ^1, σ^2 til å vise at man kan velge $\chi^{(-)}(\hat{p}) = \mathrm{i}\sigma^2\chi^{(+)}(\hat{p})^*$.

Vi tar utgangspunkt i at

$$(\sigma^1p^1 + \sigma^2p^2 + \sigma^3p^3)_{\alpha\beta}\,\chi^{(+)}_\beta(\hat{p}) = |\boldsymbol{p}|\,\chi^{(+)}_\alpha(\hat{p}).$$

Ved kompleks konjugasjon fås

$$(\sigma^1p^1 - \sigma^2p^2 + \sigma^3p^3)_{\alpha\beta}\,\chi^{(+)*}_\beta(\hat{p}) = |\boldsymbol{p}|\,\chi^{(+)*}_\alpha(\hat{p}).$$

Multiplikasjon med $\mathrm{i}\sigma^2$ og bruk av at $\sigma^2\sigma^1 = -\sigma^1\sigma^2$ og $\sigma^2\sigma^3 = -\sigma^3\sigma^2$ gir

$$(-\sigma^1p^1 - \sigma^2p^2 - \sigma^3p^3)_{\alpha\beta}\,\mathrm{i}\sigma^2_{\beta\gamma}\chi^{(+)*}_\gamma(\hat{p}) = |\boldsymbol{p}|\,\mathrm{i}\sigma^2_{\alpha\gamma}\chi^{(+)*}_\gamma(\hat{p}),$$

som viser at $\mathrm{i}\sigma^2\,\chi^{(+)*}(\hat{p})$ er en egenvektor for $(\boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p})$ med egenverdi $-|\boldsymbol{p}|$, og derfor er et mulig valg for $\chi^{(-)*}(\hat{p})$.

b) Gitt valget over, hva blir da $\mathrm{i}\sigma^2\chi^{(-)}(\hat{p})^*$?
Tips: Husk at $\sigma^2\sigma^2 = 1$.

Direkte innsetting gir

$$\mathrm{i}\sigma^2\chi^{(-)}(\hat{p})^* = (\mathrm{i}\sigma^2)(\mathrm{i}\sigma^2)^*\chi^{(+)}(\hat{p})^{**} = -\chi^{(+)}(\hat{p}), \tag{8}$$

siden $(\mathrm{i}\sigma^2)(\mathrm{i}\sigma^2)^* = -\sigma^2\sigma^2 = -1$.

c) Gjør nå (planbølge) ansatsen

$$L(x) = A_+(p)\chi^{(+)}(\hat{p})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} + B_-(p)\chi^{(-)}(\hat{p})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}px} \tag{9}$$

der koeffisientene $A_+(p)$, $B_-(p)$ antas å være reelle. Bruk så ligning (6) til å finne et lineært homogent ligningssystem for disse koeffisientene.
Tips: Bruk at en ligning av formen

$$\mathcal{C}_+\,\chi^{(+)}(\hat{p})\,\mathrm{e}^{-ipx} + \mathcal{C}_-\,\chi^{(-)}(\hat{p})\,\mathrm{e}^{ipx} = 0$$

bare kan være oppfylt dersom $\mathcal{C}_+ = \mathcal{C}_- = 0$.

Vi finner at

$$\begin{aligned}
\mathrm{i}\sigma^\mu\,\partial_\mu L &= \big(p^0 - \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\big)\,A_+(p)\chi^{(+)}(\hat{p})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} - \big(p^0 - \boldsymbol{\sigma}\cdot\boldsymbol{p}\big)\,B_-(p)\chi^{(-)}(\hat{p})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}px} \\
&= \big(p^0 - |\boldsymbol{p}|\big)\,A_+(p)\chi^{(+)}(\hat{p})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px} - \big(p^0 + |\boldsymbol{p}|\big)\,B_-(p)\chi^{(-)}(\hat{p})\,\mathrm{e}^{+\mathrm{i}px}, \\
-M\mathrm{i}\sigma^2L^* &= -MA_+(p)\chi^{(-)}(\hat{p})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}px} + MB_-(p)\chi^{(+)}(\hat{p})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}.
\end{aligned}$$

Vi innsetter dette i (6), og krever at koeffisientene framfor $\chi^{(+)}(\hat{p})\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}px}$ og $\chi^{(-)}(\hat{p})\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}px}$ skal forsvinne. Dette gir

$$\begin{pmatrix} p^0 - |\boldsymbol{p}| & M \\ -M & -(p^0 + |\boldsymbol{p}|) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} A_+(p) \\ B_-(p) \end{pmatrix} = 0. \tag{10}$$

d) Hvilken (dispersjons)relasjon må p^0 oppfylle for at ligningssystemet fra forrige punkt skal ha løsning forskjellig fra null?

Ligningssystemet (10) har ikke-triviell løsning bare dersom determinanten til matrisen forsvinner, dvs. hvis $-(p^0 - |\boldsymbol{p}|)(p^0 + |\boldsymbol{p}|) + M^2 = 0$, eller

$$p^0 = \pm\sqrt{M^2 + \boldsymbol{p}^2}. \tag{11}$$

e) Anta en løsning der $p^0 > 0$ oppfyller dispersjonsrelasjonen, og bestem forholdet mellom B_- og A_+ i løsningsansatsen (9).

Vi finner f.eks

$$B_-(p) = \frac{(p^0 - |\boldsymbol{p}|)}{M}\, A_+(p), \tag{12}$$

som kan løses ved f.eks. å velge $A_+(p) = \sqrt{p^0 + |\boldsymbol{p}|}$ og $B_-(p) = \sqrt{p^0 - |\boldsymbol{p}|}$.

f) Skissér hvordan du ville gå fram for å finne den generelle løsningen til feltligningen (6), uttrykt ved planbølger, og for å kvantisere dette feltet.

Vi har her funnet en sett med planbølgeløsninger, på formen

$$L^{(1)}_\alpha(\boldsymbol{p}; x) = \sqrt{p^0 + |\boldsymbol{p}|}\, \chi^{(+)}(\hat{p})_\alpha\, \mathrm{e}^{-ipx} + \sqrt{p^0 - |\boldsymbol{p}|}\; \chi^{(-)}(\hat{p})_\alpha\, \mathrm{e}^{ipx}. \tag{13}$$

Ved å superponere slike, *med reelle koeffisienter*, får vi forsatt en løsning av Majorana ligningen. Men dette er ikke alle planbølgeløsningene!

Hvis vi i stedet antar at koeffisientene A_+ og B_- er rent imaginære får vi planbølgeløsninger på formen

$$L^{(2)}_\alpha(\boldsymbol{p}; x) = \mathrm{i}\sqrt{p^0 - |\boldsymbol{p}|}\, \chi^{(+)}(\hat{p})_\alpha\, \mathrm{e}^{-ipx} - \mathrm{i}\sqrt{p^0 + |\boldsymbol{p}|}\; \chi^{(-)}(\hat{p})_\alpha\, \mathrm{e}^{ipx}. \tag{14}$$

Videre, ved å bytte om $\chi^{(+)}$ og $\chi^{(-)}$ i løsningsansatsen finner vi planbølgeløsninger på formen

$$L^{(3)}_\alpha(\boldsymbol{p}; x) = \sqrt{p^0 - |\boldsymbol{p}|}\, \chi^{(-)}(\hat{p})_\alpha\, \mathrm{e}^{-ipx} + \sqrt{p^0 + |\boldsymbol{p}|}\; \chi^{(+)}(\hat{p})_\alpha\, \mathrm{e}^{ipx}. \tag{15}$$

og

$$L^{(4)}_\alpha(\boldsymbol{p}; x) = \mathrm{i}\sqrt{p^0 + |\boldsymbol{p}|}\, \chi^{(-)}(\hat{p})_\alpha\, \mathrm{e}^{-ipx} + \mathrm{i}\sqrt{p^0 - |\boldsymbol{p}|}\; \chi^{(+)}(\hat{p})_\alpha\, \mathrm{e}^{ipx}. \tag{16}$$

Dette danner en fullstendig basis av planbølgeløsninger. For en generell løsning kan vi superponere slike med vilkårlige reelle koeffisienter. For kvantisering postulerer vi at disse reelle koeffisientene skal være hermittiske kombinasjoner av kreasjons- og annihilasjonsoperatorer.