Norges teknisk-naturvitenskapelige universitet
NTNU
Institutt for fysikk (Lade)

EKSAMEN I: MNF FY 244 – KVANTEMEKANIKK I

DATO: Tirsdag 14. desember 1999 TID: 9.00 – 15.00

Antall vekttall: 4
Antall sider: 3
Sensurdato: 15. januar 2000.

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator, matematisk formelsamling.

En samling av mer eller mindre relevante formler (uten nærmere forklaring) er gitt til slutt i oppgavesettet.

Oppgave 1

a. En partikkel med masse m beveger seg i et symmetrisk éndimensjonalt potensial, $V(x) = V(-x)$. Redegjør for symmetriegenskapene (paritetsegenskapene) til løsningene av den tidsuavhengige (stasjonære) Schrødingerligningen for et slikt potensial.

b. Anta i resten av oppgaven at $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$, og anta at systemet ved $t = 0$ prepareres i en begynnelsestilstand

$$\Psi(x,0) = C\exp[-m\omega(x-x_0)^2/2\hbar],$$

der x_0 er en positiv konstant. Lag en prinsippskisse av $\Psi(x,0)$ som funksjon av x. Angi om tilstanden $\Psi(x,t)$ for $t > 0$ blir stasjonær eller ikke-stasjonær, og begrunn svaret.

c. Hva er forventningsverdiene $\langle\, x\,\rangle_0$ og $\langle\, p_x\,\rangle_0$ (ved $t = 0$)?

d. Finn forventningsverdiene $\langle\, x\,\rangle_t$ og $\langle\, p_x\,\rangle_t$ som funksjoner av t (for $t > 0$), uten å løse den tidsavhengige Schrødingerligningen.

Oppgave 2

Et elektron beveger seg i det tredimensjonale potensialet

$$V(r) = -\frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0}\frac{1}{r}.$$

Vi søker egenfunksjoner til Hamiltonoperatoren H for dette systemet, på formen

$$\psi(r,\theta,\phi) = R(r)Y(\theta,\phi).$$

a. Anta at Y_l er en egenfunksjon til den kvadrerte dreieimpulsoperatoren, $\mathbf{L}^2$, med egenverdi $\hbar^2 l(l+1)$, og vis at $R(r)$ da må tilfredsstille radialligningen

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2m_e}{\hbar^2}\left[E - V(r)\right]\right\} R_l(r) = 0$$

for at $\psi_l = R_l Y_l$ skal være en egenfunksjon til H med egenverdi E.

b. Vis (ved eksplisitt regning) at

$$Y_l = C \sin\theta \cos\theta \cos\phi$$

er en egenfunksjon til $\mathbf{L}^2$, og bestem egenverdien og kvantetallet l. [C er en konstant.]

c. Med l-verdien fra pkt. **b** har radialligningen i pkt. **a** en løsning på formen

$$R_l(r) = cr^2 \exp(-\beta r),$$

der c er en konstant, og parameteren β har en bestemt verdi. Vis dette ved innsetting, bestem parameteren β, og finn egenverdien E til Hamilton-operatoren H for løsningen $\psi_l = R_l Y_l$.

d. Vis at funksjonen Y_l i pkt. **b** er en lineærkombinasjon av to sfæriske harmoniske.

Hamilton-operatoren H har *flere* lineært uavhengige egenfunksjoner med den energien E og det kvantetallet l som ble funnet ovenfor. Angi antallet slike egenfunksjoner (inklusive den som ble funnet i pkt. **c**).

For det l-kvantetallet som ble funnet ovenfor har H dessuten egenfunksjoner med andre E-verdier enn den som ble funnet i pkt. **c**. Argumentér for at disse andre E-verdiene ligger høyere enn den som ble funnet i pkt. **c**.

Oppgave 3

Med tilstandene *spinn opp* ($|\hat{\mathbf{z}}\rangle$) og *spinn ned* ($|-\hat{\mathbf{z}}\rangle$) langs $\hat{\mathbf{z}}$-aksen som basis (for et spinn-$\frac{1}{2}$-system) kan vi som kjent lage oss en matriserepresentasjon, der en vilkårlig spinntilstand $|\chi\rangle$ representeres av søylematrisen (spinoren)

$$\chi = \begin{pmatrix} \langle\hat{\mathbf{z}}|\chi\rangle \\ \langle-\hat{\mathbf{z}}|\chi\rangle \end{pmatrix}$$

og spinn-operatoren representeres av matrisen $\mathbf{S} = \frac{1}{2}\hbar(\hat{\mathbf{x}}\sigma_x + \hat{\mathbf{y}}\sigma_y + \hat{\mathbf{z}}\sigma_z) \equiv \frac{1}{2}\hbar\boldsymbol{\sigma}$. Her er σ_x osv Pauli-matrisene.

a. Vis at spinoren

$$\chi_{\hat{\mathbf{n}}} = \begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2}\theta \\ \sin\frac{1}{2}\theta\, e^{i\phi} \end{pmatrix}$$

er en egentilstand til operatoren $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}$, og bestem egenverdien. Her er $\hat{\mathbf{n}}$ en enhetsvektor med retningsvinkler θ og ϕ: $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{x}}\sin\theta\cos\phi + \hat{\mathbf{y}}\sin\theta\sin\phi + \hat{\mathbf{z}}\cos\theta$. [Hint: $\boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}} = \sigma_x n_x + \sigma_y n_y + \sigma_z n_z$.]

b. Kontrollér at $\chi_{\hat{\mathbf{n}}}$ er normert til 1. Som nevnt innledningsvis er de to komponentene i spinoren "projeksjonene" av den aktuelle spinntilstanden på de to basistilstandene. Hva er den fysiske tolkningen av disse projeksjonene?

c. Anta at spinnet er i tilstanden $\chi_{\hat{\mathbf{n}}}$, og at vi måler $S_x = \mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{x}}$. Finn sannsynlighetsamplituden ($A_{\hat{\mathbf{x}}}$) for måleresultatet $S_x = \frac{1}{2}\hbar$, beregn sannsynligheten, og forsøk å vise at denne kan uttrykkes ved skalarproduktet $\hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{n}}$. Kontrollér resultatet ved å se på spesialtilfellene $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{x}}$ og $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{x}}$.

d. Anta at målingen av S_x gir resultatet $\frac{1}{2}\hbar$, og at vi umiddelbart etterpå måler $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{k}}$, der $\hat{\mathbf{k}}$ er en enhetsvektor med retningsvinkler θ' og ϕ'. Hva er da sannsynlighetene for resultatene $\pm\frac{1}{2}\hbar$ ved målingen av $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{k}}$?

$$---***---$$

Noen formler:

$$\frac{d}{dt}\langle\,\mathbf{r}\,\rangle = \frac{\langle\,\mathbf{p}\,\rangle}{m}; \qquad \frac{d}{dt}\langle\,\mathbf{p}\,\rangle = \langle\,-\boldsymbol{\nabla}V\,\rangle;$$

$$-\frac{\mathbf{L}^2}{\hbar^2} = \frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\,\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\,\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}; \qquad L_z = \frac{\hbar}{i}\,\frac{\partial}{\partial\phi}; \qquad \boldsymbol{\nabla}^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\,\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\mathbf{L}^2}{\hbar^2 r^2};$$

$$a_B = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{m_e e^2}; \qquad \alpha = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0\hbar c};$$

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}; \qquad \sigma_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}; \qquad \sigma_z = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix};$$

	l	m	$Y_{lm}(\theta,\phi)$
s	0	0	$Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}$
p	1	0	$Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}}\,\cos\theta$
		±1	$Y_{1,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{3}{8\pi}}\,\sin\theta\,e^{\pm i\phi}$
d	2	0	$Y_{20} = \sqrt{\frac{5}{16\pi}}\,(3\cos^2\theta - 1)$
		±1	$Y_{2,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{15}{8\pi}}\,\sin\theta\cos\theta\,e^{\pm i\phi}$
		±2	$Y_{2,\pm2} = \sqrt{\frac{15}{32\pi}}\,\sin^2\theta\,e^{\pm 2i\phi}$
f	3	0	$Y_{30} = \sqrt{\frac{7}{16\pi}}\,(5\cos^3\theta - 3\cos\theta)$
		±1	$Y_{3,\pm1} = \mp\sqrt{\frac{21}{64\pi}}\,\sin\theta\,(5\cos^2\theta - 1)\,e^{\pm i\phi}$
		±2	$Y_{3,\pm2} = \sqrt{\frac{105}{32\pi}}\,\sin^2\theta\cos\theta\,e^{\pm 2i\phi}$
		±3	$Y_{3,\pm3} = \mp\sqrt{\frac{35}{64\pi}}\,\sin^3\theta\,e^{\pm 3i\phi}$

$$---***---$$

MERK! Studentene må primært gjøre seg kjent med sensur ved å oppsøke sensuroppslagene. Evt. telefonhenvendelser om sensur må rettes til instituttet. Eksamenskontoret vil ikke kunne svare på slike henvendelser.

NTNU – Institutt for fysikk (Lade)

EKSAMEN I : MNF FY 244 –Kvantemekanikk I – 14. desember 1999
LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1. LØSNING

a. Løsningene av den stasjonære Schrödingerligningen for et symmetrisk éndimensjonalt potensial, $V(-x) = V(x)$, er enten symmetriske,

$$P\psi(x) \equiv \psi(-x) = \psi(x), \qquad \text{(paritet +)},$$

eller antisymmetriske,

$$P\psi(x) \equiv \psi(-x) = -\psi(x), \qquad \text{(paritet −)}.$$

b. Begynnelsestilstanden er hverken symmetrisk eller antisymmetrisk, og er følgelig forskjellig fra alle de stasjonære løsningene, $\psi_n(x)$. Derfor må vi ha

$$\Psi(x,0) = \sum_n c_n \psi_n(x),$$

der summen inneholder mer enn ett bidrag (i virkeligheten uendelig mange). Dette innebærer at løsningen for $t > 0$,

$$\Psi(x,t) = \sum_n c_n \exp(-iE_n t/\hbar)\psi_n(x),$$

blir ikke-stasjonær.

c. Forventningsverdien av x ved $t = 0$ er

$$\langle\, x \,\rangle_0 = \int [\Psi(x,0)]^2 x dx = x_0,$$

idet sannsynlighetstettheten $[\Psi(x,0)]^2$ er symmetrisk med hensyn på x_0. Forventningsverdien av p_x er

$$\langle\, p_x \,\rangle_0 = \int \Psi^*(x,0) \frac{\hbar}{i} \frac{\partial}{\partial x} \Psi(x,0) dx = 0.$$

Den enkleste måten å innse at integralet er lik null på er å merke seg at bølgefunksjonen er reell, slik at integranden er rent imaginær, mens forventningsverdien $\langle\, p_x \,\rangle$ alltid er reell.

d. Fra Ehrenfests teorem,

$$\frac{d\langle\, x \,\rangle}{dt} = \frac{\langle\, p_x \,\rangle}{m}, \qquad \frac{d\langle\, p_x \,\rangle}{dt} = \langle\, -\frac{dV}{dx} \,\rangle = -m\omega^2 \langle\, x \,\rangle,$$

finner vi ved derivasjon av den første ligningen at

$$\frac{d^2\langle\, x \,\rangle}{dt^2} = \frac{1}{m} \frac{d\langle\, p_x \,\rangle}{dt} = -\omega^2 \langle\, x \,\rangle.$$

Denne har løsningen

$$\langle\, x \,\rangle_t = A \cos\omega t + B \sin\omega t,$$

$$\langle\, p_x \,\rangle_t = m\frac{d\langle\, x \,\rangle}{dt} = m\omega(B\cos\omega t - A\sin\omega t).$$

Ved $\quad t=0 \quad$ har vi

$$\langle\, x \,\rangle_0 = A\cdot 1 + B\cdot 0 = A \quad \text{dvs.} \quad A = \langle\, x \,\rangle_0 = x_0,$$

$$\langle\, p_x \,\rangle_0 = m\omega(B\cdot 1 - A\cdot 0) = m\omega B, \quad \text{dvs.} \quad B = \langle\, p_x \,\rangle_0/m\omega = 0.$$

Løsningen er altså

$$\langle\, x \,\rangle_t = x_0\cos\omega t$$
$$\langle\, p_x \,\rangle_t = -m\omega x_0 \sin\omega t.$$

Oppgave 2. LØSNING

a. Ved innsetting i den stasjonære Schrödingerligningen finner vi at $\psi_l = R_l Y_l$ er en egenfunksjon (med egenverdi E) dersom

$$\begin{aligned} 0 &= (H-E)R_lY_l \\ &= \left\{-\frac{\hbar^2}{2m_e}\left[\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{l(l+1)}{r^2}\right] + V(r) - E\right\} R_lY_l = 0. \end{aligned}$$

Radialligningen er altså

$$\left\{\frac{d^2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{d}{dr} - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2m_e}{\hbar^2}\left(E - V(r)\right)\right\} R_l(r) = 0, \quad \text{q.e.d.}$$

b. Med

$$\frac{\partial}{\partial\theta}(\sin\theta\cos\theta) = \cos 2\theta, \qquad \frac{\partial^2}{\partial\theta^2}(\sin\theta\cos\theta) = -2\sin 2\theta \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\cos\phi = -\cos\phi$$

finner vi ved innsetting at

$$\begin{aligned} -\frac{\mathbf{L}^2}{\hbar^2}\frac{Y_l}{C} &= \left[\frac{\partial^2}{\partial\theta^2} + \cot\theta\frac{\partial}{\partial\theta} + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2}{\partial\phi^2}\right]\sin\theta\cos\theta\cos\phi \\ &= \cos\phi\left[-2\sin 2\theta + \cot\theta\cos 2\theta - \frac{\sin\theta\cos\theta}{\sin^2\theta}(-1)\right] \\ &= \cos\phi\,\frac{\cos\theta}{\sin\theta}(-4\sin^2\theta + 1 - 2\sin^2\theta - 1) \\ &= -6\sin\theta\cos\theta\cos\phi = -6\frac{Y_l}{C}. \end{aligned}$$

Vi har altså at

$$\mathbf{L}^2 Y_l = 6\hbar^2 Y_l = \hbar^2\cdot 2\cdot(2+1)Y_l.$$

Egenverdien er altså $6\hbar^2$ og kvantetallet er $\quad l=2.$

c. Med

$$R' = ce^{-\beta r}(-\beta r^2 + 2r) \quad \text{og} \quad R'' = ce^{-\beta r}(\beta^2 r^2 - 4\beta r + 2)$$

finner vi ved innsetting i radalligningen at

$$\begin{aligned} 0 &= ce^{-\beta r}\left\{(\beta^2 r^2 - 4\beta r + 2) + (4 - 2\beta r) - 6 + \frac{2m_e}{\hbar^2}\left[E + \frac{Ze^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right] r^2\right\} \\ &= ce^{-\beta r}\left\{r^2\left[\frac{2m_e E}{\hbar^2} + \beta^2\right] + r\left[-6\beta + \frac{Zm_e e^2}{2\pi\epsilon_0\hbar^2}\right]\right\}. \end{aligned}$$

For at denne skal være oppfylt for alle r må begge de to hakeparentesene være lik null. Parameteren β er altså gitt ved

$$\beta = \frac{Zm_e e^2}{12\pi\epsilon_0\hbar^2} = \frac{Z}{3a_B},$$

der a_B er Bohr-radien, og energi-egenverdien er

$$E = -\frac{\beta^2\hbar^2}{2m_e} = -\frac{Z^2\hbar^2}{2m_e a_B^2}\,\frac{1}{9}.$$

[I parentes kan det bemerkes at dette er en ni-del av energien i grunntilstanden for dette hydrogenlignende systemet, og at vi har funnet en egentilstand som svarer til hovedkvantetall $n = 3$.]

d. Da

$$\sin\theta\cos\theta\cos\phi = \tfrac{1}{2}\sin\theta\cos\theta(e^{i\phi} + e^{-i\phi}),$$

ser vi fra den vedlagte tabellen over sfæriske harmoniske at funksjonen Y_l er en lineærkombinasjon av Y_{21} og $Y_{2,-1}$,

$$Y_l \propto (-Y_{21} + Y_{2,-1}).$$

For $l = 2$ har vi totalt 5 sfæriske harmoniske, altså 5 lineært uavhengige egenfunksjoner til $\mathbf{L}^2$ med kvantetall 2. Dette betyr at det i tillegg til egenfunksjonen $\psi = R_2(r)Y_l$ finnes fire andre egenfunsjoner med samme energi, på formen $\psi = R_2(r)Y$, der vi for Y kan velge f.eks. $Y_{20}, Y_{2,\pm2}$, samt en funksjon proporsjonal med $Y_{21} + Y_{2,-1}$. [Den sistnevnte er ortogonal til lineærkombinasjonen ovenfor.]

Det er flere måter å innse at *andre* egenfunksjoner for $l = 2$ må ha høyere energi. De som kjenner egenfunksjonssettet til det hydrogenlignende atomet vil vite at hovedkvantetallet n er større enn eller lik $l + 1$, altså ≥ 3 i dette tilfellet. Da de 5 vi alt har funnet har $n = 3$, må alle andre ha $n \geq 4$, og derfor høyere energi enn ovenfor.

En annen måte å innse dette på er via radialligningen. Denne kan som kjent skrives på éndimensjonal form, når en innfører $u = rR(r)$. Løsningen i pkt. **c** har ingen nullpunkter utenom origo. Andre løsninger av denne ligningen (for $l = 2$) må ha ett eller flere nullpunkter utenom origo, og vil derfor ha høyere energi (ut fra våre erfaringer med krumningsegenskaper for éndimensjonale bølgefunksjoner).

Oppgave 3. LØSNING

a. Ved innsetting finner vi at

$$\begin{aligned} \frac{\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}}{\frac{1}{2}\hbar}\,\chi_{\hat{\mathbf{n}}} = \boldsymbol{\sigma}\cdot\hat{\mathbf{n}}\,\chi_{\hat{\mathbf{n}}} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta e^{-i\phi} \\ \sin\theta e^{i\phi} & -\cos\theta \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\frac{1}{2}\theta \\ \sin\frac{1}{2}\theta\, e^{i\phi} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos\theta\cos\frac{1}{2}\theta + \sin\theta\sin\frac{1}{2}\theta \\ (\sin\theta\cos\frac{1}{2}\theta - \cos\theta\sin\frac{1}{2}\theta)e^{i\phi} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\theta - \frac{1}{2}\theta) \\ \sin(\theta - \frac{1}{2}\theta)e^{i\phi} \end{pmatrix} = \chi_{\hat{\mathbf{n}}} \end{aligned}$$

Spinoren $\chi_{\hat{\mathbf{n}}}$ er altså en egentilstand til $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{n}}$ med egenverdi $\frac{1}{2}\hbar$.

b. Skalarproduktet av spinoren med seg sjøl er

$$\chi_{\hat{\mathbf{n}}}^{\dagger}\chi_{\hat{\mathbf{n}}} = \cos^2\tfrac{1}{2}\theta + \sin^2\tfrac{1}{2}\theta = 1.$$

Spinoren er altså normert til 1. Øvre komponent i spinoren er sannsynlighetsamplituden $\langle\hat{\mathbf{z}}|\hat{\mathbf{n}}\rangle = \chi_{\hat{\mathbf{z}}}^{\dagger}\chi_{\hat{\mathbf{n}}} = \cos\frac{1}{2}\theta$ for å finne $+\frac{1}{2}\hbar$ ved en måling av S_z. Nedre komponent er amplituden for å måle $S_z = -\frac{1}{2}\hbar$. Sannsynlighetene er tallverdikvadratene av disse amplitudene, altså henholdsvis $\cos^2\frac{1}{2}\theta$ og $\sin^2\frac{1}{2}\theta$.

c. Sannsynlighetsamplituden for å måle $S_x = \frac{1}{2}\hbar$ når spinnet er i $\chi_{\hat{\mathbf{n}}}$ er gitt ved projeksjonen

$$\langle\hat{\mathbf{x}}|\hat{\mathbf{n}}\rangle = \chi_{\hat{\mathbf{x}}}^{\dagger}\chi_{\hat{\mathbf{n}}}.$$

Fra formelen for $\chi_{\hat{\mathbf{n}}}$ finner vi $\chi_{\hat{\mathbf{x}}}$ ved å sette $\theta = \frac{1}{2}\pi$ og $\phi = 0$:

$$\chi_{\hat{\mathbf{x}}} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Sannsynlighetsamplituden blir dermed

$$\begin{aligned} A_{\hat{\mathbf{x}}} &= \chi_{\hat{\mathbf{x}}}^{\dagger}\chi_{\hat{\mathbf{n}}} = (\cos\tfrac{1}{2}\theta + \sin\tfrac{1}{2}\theta e^{i\phi})/\sqrt{2} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2}}[(\cos\tfrac{1}{2}\theta + \sin\tfrac{1}{2}\theta\cos\phi) + i(\sin\tfrac{1}{2}\theta\sin\phi)]. \end{aligned}$$

Sannsynligheten er

$$\begin{aligned} P_{\hat{\mathbf{x}}} &= |A_{\hat{\mathbf{x}}}|^2 = \tfrac{1}{2}[\cos^2\tfrac{1}{2}\theta + 2\sin\tfrac{1}{2}\theta\cos\tfrac{1}{2}\theta\cos\phi + \sin^2\tfrac{1}{2}\theta\cos^2\phi + \sin^2\tfrac{1}{2}\theta\sin^2\phi] \\ &= \tfrac{1}{2}[1 + \sin\theta\cos\phi] = \tfrac{1}{2}(1 + n_x) = \tfrac{1}{2}(1 + \hat{\mathbf{x}}\cdot\hat{\mathbf{n}}). \end{aligned}$$

Som en kontroll merker vi oss at $\hat{\mathbf{n}} = \hat{\mathbf{x}}$ gir sannsynlighet lik 1, slik det skal være. For $\hat{\mathbf{n}} = -\hat{\mathbf{x}}$ finner vi null sannsynlighet, som også er slik det skal være: Tilstanden $\chi_{-\hat{\mathbf{x}}}$ svarer til spinnretningen $-\hat{\mathbf{x}}$, og da er selvsagt sannsynligheten for å måle $S_x = \frac{1}{2}\hbar$ lik null (mens sannsynligheten for å måle $S_x = -\frac{1}{2}\hbar$ er lik 1).

d. Etter målingen av $S_x = \frac{1}{2}\hbar$ er spinnet i tilstanden $\chi_{\hat{\mathbf{x}}}$. Sannsynligheten for å måle $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{k}}$ lik $\frac{1}{2}\hbar$ er ifølge framgangsmåten i pkt. **c** gitt ved

$$P = |\langle\hat{\mathbf{k}}|\hat{\mathbf{x}}\rangle|^2 = |\langle\hat{\mathbf{x}}|\hat{\mathbf{k}}\rangle|^2 = \ldots = \tfrac{1}{2}(1 + \sin\theta'\cos\phi') = \tfrac{1}{2}(1 + \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{x}}).$$

Sannsynligheten for å måle $\mathbf{S}\cdot\hat{\mathbf{k}}$ lik $-\frac{1}{2}\hbar$ er gitt ved

$$P_{-\hat{\mathbf{k}}} = 1 - P_{\hat{\mathbf{k}}} = \tfrac{1}{2}(1 - \hat{\mathbf{k}}\cdot\hat{\mathbf{x}}).$$