NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET
Institutt for fysikk

Faglig kontakt under eksamen: Ingjald Øverbø, tel. 73 59 18 67

EKSAMEN I: MNFFY245 – INNFØRING I KVANTEMEKANIKK

DATO: Onsdag 12. juni 2002 TID: 9.00 – 15.00

Antall vekttall: 4
Antall sider: 2

Tillatte hjelpemidler: Kalkulator,
Rottmanns matematiske formelsamling.

Noen uttrykk og formler er samlet i et vedlegg.

Sensurdato: 3. juli 2002.

Oppgave 1

En partikkel med masse m beveger seg i én dimensjon, i et tidsuavhengig potensial $V(x)$ som foreløpig er uspesifisert.

a. Angi operatorene p_x^{op} og H som svarer til observablene p_x (impulsen) og E (energien) for dette systemet. Vis at *energien er en bevegelseskonstant* for dette systemet, i den forstand at forventningsverdien av energien ved tiden t, $\langle E \rangle_t$, er uavhengig av t. Hvilken betingelse må $V(x)$ oppfylle for at også partikkelens *impuls* p_x skal være en bevegelseskonstant?

Fremdeles uten å spesifisere potensialet $V(x)$ kan vi anta at dette systemet ved $t = 0$ prepareres i en begynnelsestilstand beskrevet ved bølgefunksjonen

$$\Psi(x,0) = Ce^{-\beta x^2} e^{ip_0 x/\hbar} \qquad (\beta > 0).$$

b. Bestem C slik at $\Psi(x,0)$ er normert, og finn (helst uten regning) forventningsverdien $\langle x \rangle_0$ ved $t = 0$.

c. Regn ut $p_x^{op}\Psi(x,0)$ og vis at $\Psi(x,0)$ *ikke* er en egenfunksjon til p_x^{op}. Finn forventningsverdien $\langle p_x \rangle_0$.

d. Beregn $\langle x^2 \rangle_0$ og usikkerheten $(\Delta x)_0$ for begynnelsestilstanden $\Psi(x,0)$.

e. Vis at

$$\langle p_x^2 \rangle_\Psi = \int_{-\infty}^{\infty} |p_x^{op}\Psi|^2 dx$$

for en vilkårlig kvadratisk integrerbar tilstand $\Psi(x,t)$.
Beregn $\langle p_x^2 \rangle_0$ og usikkerheten $(\Delta p_x)_0$ for begynnelsestilstanden $\Psi(x,0)$. Er resultatet fornuftig i grensen $\beta \to 0$? Kontrollér at $(\Delta x)_0(\Delta p_x)_0$ kommer ut i overensstemmelse med Heisenbergs usikkerhetsrelasjon.

La oss nå spesifisere potensialet. Anta først at partikkelen er fri $[V(x) = 0]$.

f. Argumentér for (eller vis) at usikkerheten i impulsen, $(\Delta p_x)_t$, er uavhengig av t i dette tilfellet.
Angi uten bevis hva som vil skje med usikkerheten $(\Delta x)_t$ for $t > 0$.
Finn den forventede posisjonen $\langle\, x\,\rangle_t$ som funksjon av t for $t > 0$.

Anta så at partikkelen beveger seg i potensialet $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2 x^2$.

g. Finn forventningsverdiene $\langle\, x\,\rangle_t$, $\langle\, p_x\,\rangle_t$ og $\langle\, E\,\rangle_t$ i dette tilfellet.

h. For $p_0 = 0$ viser resultatene fra pkt. **g** at $\langle\, x\,\rangle_t = \langle\, p_x\,\rangle_t = 0$. Betyr dette at tilstanden $\Psi(x,t)$ er stasjonær for $p_0 = 0$?

Oppgave 2

Et elektron med masse m_e beveger seg i potensialet

$$V(r) = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r} = -\frac{\hbar^2}{m_e a_B r}.$$

Ved $t = 0$ prepareres dette systemet i den normerte tilstanden $\psi_a(r) = (\pi a^3)^{-1/2} e^{-r/a}$, der (den positive) parameteren a foreløpig er ubestemt.

a. Beregn $H\psi_a(r)$, der H er systemets Hamilton-operator, og vis at $\psi_a(r)$ er en egenfunksjon til H bare for én bestemt verdi av a, heretter kalt a_1. Finn den tilhørende energiegenverdien (heretter kalt E_1).

b. Egentilstanden $\psi_{a_1}(r)$ er i realiteten grunntilstanden for dette systemet. Hvordan vil du sannsynliggjøre dette for en som *ikke* kjenner formlene for energiene E_n og de tilhørende egenfunksjonene $\psi_{nlm} = R_{nl}(r)Y_{lm}(\theta,\phi)$ for de bundne tilstandene for hydrogenlignende systemer?
[Hint: Funksjonene $u_{nl}(r) \equiv rR_{nl}(r)$ oppfyller en radialligning på éndimensjonal form, med et effektivt potensial $V^l_{\text{eff}}(r) = V(r) + \hbar^2 l(l+1)/(2m_e r^2)$. Hvilken verdi for l vil du ut fra dette vente å finne for grunntilstanden?]

c. Tilbake til den generelle begynnelsestilstanden $\psi_a(r)$ (der a har en vilkårlig verdi): Anta at det foretas en måling av observablene $\mathbf{L}^2$ og E.
Hva er sannsynligheten for å måle en $\mathbf{L}^2$ som svarer til $l > 0$?
Finn sannsynligheten (P_1) for å måle energien E lik grunntilstandsenergien E_1 (som ble beregnet i pkt. **a**). (Kontrollér at formelen gir det korrekte resultatet for spesialtilfellet $a = a_1$.)
Hva blir systemets tilstand etter en måling som gir $E = E_1$?

d. Beregn forventningsverdien $\langle\, E\,\rangle_a$ for begynnelsestilstanden $\psi_a(r)$, og vis at $\langle\, E\,\rangle_a - E_1$ er større enn null unntatt for $a = a_1$. Kan du forklare dette siste resultatet?

e. Sett $a = \frac{1}{2}a_1$ i formlene som er funnet for P_1 og $\langle\, E\,\rangle_a$. Hvordan vil du tolke resultatet for $\langle\, E\,\rangle_{a_1/2}$?

Formler og uttrykk

Vedlegg

Noe av dette kan du få bruk for.

Tidsutvikling av forventningsverdier

$$\frac{d}{dt}\langle F \rangle = \frac{i}{\hbar}\langle [H, F^{op}] \rangle + \langle \frac{\partial}{\partial t} F^{op} \rangle.$$

Ehrenfests teorem

$$\frac{d}{dt}\langle \mathbf{r} \rangle = \frac{1}{m}\langle \mathbf{p} \rangle \; ; \qquad \frac{d}{dt}\langle \mathbf{p} \rangle = \langle -\boldsymbol{\nabla} V(\mathbf{r}) \rangle.$$

Noen integraler

$$\begin{aligned} I_0(\alpha) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\alpha x^2} dx = (\pi/\alpha)^{1/2}, \\ I_{2n}(\alpha) &\equiv \int_{-\infty}^{\infty} x^{2n} e^{-\alpha x^2} dx = \left(-\frac{d}{d\alpha}\right)^n I_0(\alpha), \end{aligned}$$

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-\alpha x} dx = \frac{n!}{\alpha^{n+1}}.$$

Hermiteske operatorer

For en hermitesk operator F^{op} er

$$\int (F^{op}\Psi_1)^* \Psi_2 d\tau = \int \Psi_1^* F^{op} \Psi_2 d\tau$$

for vilkårlige, kvadratisk integrerbare funksjoner Ψ_1 og Ψ_2.

Sfæriske harmoniske

$$\left\{ \begin{array}{c} \hat{\mathbf{L}}^2 \\ \hat{L}_z \end{array} \right\} Y_{lm} = \left\{ \begin{array}{l} \hbar^2 l(l+1) \\ \hbar m \end{array} \right\} Y_{lm} \,, \qquad l = 0, 1, 2, ..., \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, ..., \pm l;$$

$$\int Y^*_{l'm'} Y_{lm} d\Omega = \delta_{l'l}\delta_{m'm};$$

$$Y_{00} = \sqrt{\frac{1}{4\pi}}, \quad Y_{10} = \sqrt{\frac{3}{4\pi}} \cos\theta \,, \quad Y_{1,\pm 1} = \mp \sqrt{\frac{3}{8\pi}} \sin\theta e^{\pm i\phi}.$$

− − − ∗ − − −

NTNU – INSTITUTT FOR FYSIKK

EKSAMEN I : MNFFY45 – Innføring i kvantemekanikk – 12. juni 2002
LØSNINGSFORSLAG

Oppgave 1

a. Impulsoperatoren er $p_x^{op} = \frac{\hbar}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ og Hamilton-operatoren er

$$H = -\frac{\hbar^2}{2m}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + V(x).$$

Siden H er tidsuavhengig ($\partial H/\partial t = 0$) følger det fra formelen for tidsutviklingen av forventningsverdier at

$$\frac{d}{dt}\langle E \rangle_t = \frac{i}{\hbar}\langle [H,H] \rangle + \langle \partial H/\partial t \rangle = 0, \quad \text{q.e.d.}$$

Fra Ehrenfests teorem følger det at impulsen p_x er en bevegelseskonstant,

$$\frac{d}{dt}\langle p_x \rangle_t = \langle -\frac{\partial V}{\partial x} \rangle = 0,$$

bare dersom V er uavhengig av x.

b. Normering krever at

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,0)^2| dx = |C|^2 \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\beta x^2} dx = |C|^2\sqrt{\pi/2\beta} = 1,$$

som er oppfylt for

$$C = (2\beta/\pi)^{1/4}.$$

Da $|\Psi(x,0)|^2 = \sqrt{2\beta/\pi}\,\exp(-2\beta x^2)$ er symmetrisk med hensyn på origo, er forventningsverdien av x åpenbart $\langle x \rangle_0 = 0$.

c. Vi regner ut

$$p_x^{op}\Psi(x,0) = (2\beta/\pi)^{1/4} e^{-\beta x^2 + ip_0/\hbar}\frac{\hbar}{i}(-2\beta x + ip_0/\hbar) = (p_0 + 2i\beta\hbar x)\Psi(x,0).$$

Da størrelsen i parentesen avhenger av x, ser vi at $\Psi(x,0)$ *ikke* er en egenfunksjon til impulsoperatoren. [Men for små β er det ikke langt ifra.] Det er nå enkelt å finne forventningsverdien for impulsen:

$$\langle p_x \rangle_0 = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^*(x,0) p_x^{op}\Psi(x,0) dx = p_0 \int_{-\infty}^{\infty} |\Psi(x,0)|^2 dx + 2i\beta\hbar\langle x \rangle_0 = p_0.$$

d. Vi regner ut

$$\langle x^2 \rangle_0 = \int_{-\infty}^{\infty} x^2 |\Psi(x,0)|^2 dx = (2\beta/\pi)^{1/2}\int_{-\infty}^{\infty} x^2 e^{-2\beta x^2} dx = (2\beta/\pi)^{1/2}\cdot\tfrac{1}{2}\pi^{1/2}(2\beta)^{-3/2} = \frac{1}{4\beta}.$$

Usikkerheten i posisjonen ved $t = 0$ blir dermed

$$(\Delta x)_0 = \sqrt{\langle x^2 \rangle_0 - \langle x \rangle_0^2} = \frac{1}{2\sqrt{\beta}}.$$

e. Fordi impulsoperatoren er hermitesk, har vi at

$$\langle\, p_x^2 \,\rangle_\Psi = \int_{-\infty}^{\infty} \Psi^* p_x^{op} p_x^{op} \Psi dx = \int_{-\infty}^{\infty} (p_x^{op}\Psi)^* (p_x^{op}\Psi) dx = \int_{-\infty}^{\infty} |p_x^{op}\Psi|^2 dx, \quad \text{q.e.d.}$$

Vha dette uttrykket og verdien for $\langle\, x^2 \,\rangle_0$ finner vi at

$$\begin{aligned} \langle\, p_x^2 \,\rangle_0 &= \int_{-\infty}^{\infty} (p_x^{op}\Psi(x,0))^* (p_x^{op}\Psi(x,0)) dx = \int_{-\infty}^{\infty} (p_0^2 + 4\beta^2\hbar^2 x^2) |\Psi(x,0)|^2 dx \\ &= p_0^2 + 4\beta^2\hbar^2 \langle\, x^2 \,\rangle_0 = p_0^2 + \hbar^2\beta. \end{aligned}$$

Usikkerheten i impulsen ved $t = 0$ blir dermed

$$(\Delta p_x)_0 = \sqrt{\langle\, p_x^2 \,\rangle_0 - \langle\, p_x \,\rangle_0^2} = \hbar\sqrt{\beta}.$$

Når $\beta \to 0$ ser vi at usikkerheten $(\Delta p_x)_0$ går mot null, dvs p_x tenderer mot å være skarpt definert lik p_0. Dette er rimelig og fornuftig, fordi begynnelsestilstanden $\Psi(x,0)$ ligner mer og mer på en ren planbølge $\exp(ip_0 x/\hbar)$ jo mindre β blir.
Usikkerhetsproduktet blir

$$(\Delta x)_0 \cdot (\Delta p_x)_0 = \tfrac{1}{2}\hbar,$$

som er det minste vi kan ha ifølge Heisenbergs usikkerhetsrelasjon.

f. Det enkleste her er kanskje å bruke formelen for tidsutviklingen av forventningsverdier til å vise at både $\langle\, p_x \,\rangle_t$ og $\langle\, p_x^2 \,\rangle_t$ er uavhengige av t. (Det samme vil da gjelde for usikkerheten $(\Delta p_x)_t = \sqrt{\langle\, p_x^2 \,\rangle_t - \langle\, p_x \,\rangle_t^2}$):

$$\frac{d}{dt}\langle\, p_x \,\rangle_t = \frac{i}{\hbar}\langle\, [H, p_x^{op}] \,\rangle = \frac{i}{2m\hbar}\langle\, [(p_x^{op})^2, p_x^{op}] \,\rangle = 0,$$

og tilsvarende for p_x^2, q.e.d. Et annet argument er at sannsynlighetsfordelingen for impuls, $|\Phi(p_x,t)|^2$, vil være konstant for den frie partikkelen.

For en fri-partikkel-pakett har vi dispersjon. Vi må derfor regne med at usikkerheten i posisjonen, $(\Delta x)_t$, vil endre seg. I og med at usikkerheten i impulsen holder seg konstant, og usikkerhetsproduktet er minimalt i utgangspunktet, må vi da regne med at usikkerheten i posisjonen vil øke med tiden.

Den forventede posisjonen finner vi vha Ehrenfests teorem:

$$\frac{d}{dt}\langle\, x \,\rangle_t = \frac{1}{m}\langle\, p_x \,\rangle_t = \frac{p_0}{m} \qquad \Longrightarrow \qquad \langle\, x \,\rangle_t = \langle\, x \,\rangle_0 + \frac{p_0 t}{m} = \frac{p_0 t}{m}.$$

g. Igjen bruker vi Ehrenfest:

$$\frac{d}{dt}\langle\, x \,\rangle_t = \frac{1}{m}\langle\, p_x \,\rangle_t\,, \qquad \frac{d}{dt}\langle\, p_x \,\rangle_t = \langle\, -\frac{dV}{dx} \,\rangle_t = -m\omega^2\langle\, x \,\rangle_t,$$

$$\Longrightarrow \qquad \frac{d^2}{dt^2}\langle\, x \,\rangle_t = \frac{1}{m}\frac{d}{dt}\langle\, p_x \,\rangle_t = -\omega^2\langle\, x \,\rangle_t.$$

Den generelle løsningen er

$$\langle\, x \,\rangle_t = A\cos\omega t + B\sin\omega t, \qquad \langle\, p_x \,\rangle_t = m\frac{d}{dt}\langle\, x \,\rangle_t = m\omega(-A\sin\omega t + B\cos\omega t).$$

For $t = 0$ har vi da

$$\langle\, x\,\rangle_0 = A\cdot 1 + B\cdot 0 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad A = 0,$$

$$\langle\, p_x\,\rangle_0 = -m\omega A\cdot 0 + m\omega B\cdot 1 = p_0 \qquad \Longrightarrow \qquad B = \frac{p_0}{m\omega}.$$

Løsningen er altså

$$\langle\, x\,\rangle_t = \frac{p_0}{m\omega}\sin\omega t\ , \qquad \langle\, p_x\,\rangle_t = p_0\cos\omega t.$$

Siden energien er en bevegelseskonstant, kan vi regne den ut for $t = 0$:

$$\langle\, E\,\rangle_t = \langle\, E\,\rangle_0 = \frac{1}{2m}\langle\, p_x^2\,\rangle_0 + \tfrac{1}{2}m\omega^2\langle\, x^2\,\rangle_0 = \frac{p_0^2}{2m} + \frac{\hbar^2\beta}{2m} + \frac{m\omega^2}{8\beta}.$$

<u>h.</u> For $p_0 = 0$ ser vi av formelen i pkt. **<u>g</u>** at

$$\langle\, x\,\rangle_t = \langle\, p_x\,\rangle_t = 0, \qquad \text{mens} \qquad \langle\, E\,\rangle_t = \frac{\hbar^2\beta}{2m} + \frac{m\omega^2}{8\beta}.$$

For alle de *stasjonære* løsningene til oscillatoren vet vi at forventningsverdiene av posisjon og impuls er lik null, men det motsatte gjelder *ikke*. Oscillatoren har nemlig som kjent bare én energiegentilstand på formen $\exp(-\beta x^2)$, for en ganske bestemt verdi av β. Følgelig kan ikke $\Psi(x,0)_{p_0=0}$ være en energiegenfunksjon (og $\Psi(x,t)$ en stasjonær løsning) for alle β. Dette gjenspeiler seg også ved at $\langle\, E\,\rangle_t = \langle\, E\,\rangle_0$ er en kontinuerlig funksjon av parameteren β, mens energiegenverdiene som kjent er kvantiserte. Det kommer også fram når vi beregner

$$\frac{d}{dx}\Psi(x,0) = \frac{d}{dx}C\,e^{-\beta x^2} = C\,e^{-\beta x^2}(-2\beta x)$$

og

$$\begin{aligned} H\Psi(x,0) &= \left(-\frac{\hbar^2}{2m}\frac{d^2}{dx^2} + \tfrac{1}{2}m\omega^2 x^2\right)C\,e^{-\beta x^2} \\ &= C\,e^{-\beta x^2}\left\{-\frac{\hbar^2}{2m}[-2\beta + 4\beta^2 x^2] + \tfrac{1}{2}m\omega^2 x^2\right\} \\ &= C\,e^{-\beta x^2}\left\{\frac{\beta\hbar^2}{m} + x^2\left[\tfrac{1}{2}m\omega^2 - 2\hbar^2\beta^2/m\right]\right\}. \end{aligned}$$

Dette viser at vi har en akseptabel løsning (egenfunksjon) bare for den spesielle verdien

$$\beta = \frac{m\omega}{2\hbar},$$

som svarer til energiegenverdien

$$\frac{\beta\hbar^2}{m} = \tfrac{1}{2}\hbar\omega.$$

Dette er som kjent energien til grunntilstanden for oscillatoren. Det ligger da i kortene at denne verdien av β må svare til et minimum i $\langle\, E\,\rangle$, noe som lett kan kontrolleres.

Oppgave 2

a. Med

$$\frac{\partial\psi_a}{\partial r} = \psi_a \cdot \left(-\frac{1}{a}\right) \qquad \text{og} \qquad \frac{\partial^2\psi_a}{\partial r^2} = \psi_a \cdot \left(\frac{1}{a}\right)^2$$

finner vi

$$H\psi_a(r) = \psi_a \left[-\frac{\hbar^2}{2m_e}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{2}{ra}\right) - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}\right] = \left[-\frac{\hbar^2}{2m_e a^2} + \frac{\hbar^2}{m_e r}\left(\frac{1}{a} - \frac{e^2 m_e}{4\pi\epsilon_0\hbar^2}\right)\right]\psi_a(r).$$

Dette viser at ψ_a er en egenfunksjon til H bare dersom a har den spesielle verdien

$$a_1 = \frac{4\pi\epsilon_0\hbar^2}{e^2 m_e} \equiv a_B \qquad \text{(Bohr-radien).}$$

Den tilsvarende energiegenverdien er

$$E_1 = -\frac{\hbar^2}{2m_e a_B^2}.$$

b. Siden sentrifugalbarrieren $\hbar^2 l(l+1)/(2m_e r^2)$ er frastøtende, og vokser med økende l, har vi det "dypeste" effektive potensialet for $l = 0$. Tilstanden $\psi_{a_1}(r)$ er uavhengig av vinkler og dermed ganske riktig en s-tilstand med $l = 0$. For det effektive potensialet $V_{\text{eff}}^0 = V(r)$ vil vi finne flere s-tilstander, som svarer til radialfunksjoner $u_{n0}(r)$ med et varierende antall nullpunkter (n_r) for $r > 0$. Erfaring og argumentasjon basert på krumningsegenskaper tilsier at energiene til disse tilstandene vokser med økende antall nullpunkter. Da ψ_{a_1} er fri for slike nullpunkter, må vi vente at det er denne som representerer grunntilstanden.

c. Siden begynnelsestilstanden er en s-tilstand, er sannsynligheten for å måle $l > 0$ lik null.

Sannsynligheten for å måle grunntilstandsenergien E_1 og etterlate systemet i grunntilstanden $\psi_{100} = \psi_{a_1}$ er kvadratet av projeksjonen av begynnelsestilstanden på grunntilstanden:

$$\begin{aligned} P_1 &= |\langle \psi_{a_1}, \psi_a \rangle|^2 = \left[\int_0^\infty (\pi a_1^3 \pi a^3)^{-1/2} e^{-r(1/a_1 + 1/a)} 4\pi r^2 dr\right]^2 \\ &= \left[4(a_1 a)^{-3/2}(1/a_1 + 1/a)^{-3} 2!\right]^2 = 64\,\frac{(a_1 a)^3}{(a_1 + a)^6}. \end{aligned}$$

Som en kontroll merker vi oss at $a = a_1$ gir $P_1 = 1$, slik det skal være.

Etter en energimåling som gir $E = E_1$ vil systemet befinne seg i tilstanden ψ_{a_1}.

d. Med

$$\langle \frac{1}{r} \rangle_a = \int \psi_a^*(r)\frac{1}{r}\psi_a(r) d^3r = 4\pi(\pi a^3)^{-1}\int_0^\infty e^{-2r/a}\frac{1}{r}r^2 dr = \frac{1}{a}$$

finner vi at forventningsverdien av energien i begynnelsestilstanden er

$$\begin{aligned} \langle E \rangle_a &= \int \psi_a^* H \psi_a d^3r \\ &= \int \psi_a \left[-\frac{\hbar^2}{2m_e a^2} + \frac{1}{r}\frac{\hbar^2}{m_e}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a_B}\right)\right]\psi_a d^3r \\ &= -\frac{\hbar^2}{2m_e a^2} + \frac{1}{a}\frac{\hbar^2}{m_e}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a_B}\right) = \frac{\hbar^2}{2m_e a^2} - \frac{\hbar^2}{m_e a a_B}. \end{aligned}$$

Dermed er

$$\langle E \rangle_a - E_1 = \frac{\hbar^2}{2m_e}\left(\frac{1}{a^2} - \frac{2}{aa_B} + \frac{1}{a_B^2}\right) = \frac{\hbar^2}{2m_e}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{a_B}\right)^2.$$

Denne differensen er større enn null, unntatt for $a = a_1 = a_B$. I det siste tilfellet er den selvsagt lik null, siden $a = a_B$ svarer til grunntilstanden.

For $a \neq a_1 (= a_B)$ er ψ_a forskjellig fra grunntilstanden ψ_{a_B}, og en utvikling av ψ_a i det fullstendige settet av energiegentilstander vil inneholde bidrag for $E > E_1$. Da må nødvendigvis også forventningsverdien $\langle E \rangle_a$ bli større enn E_1.

e. For spesialtilfellet $a = \frac{1}{2}a_1 = \frac{1}{2}a_B$ gir formlene ovenfor resultatene

$$P_1 = \frac{512}{729} \qquad \text{og} \qquad \langle E \rangle_{a_B/2} = \frac{\hbar^2}{2m_e(a_B/2)^2} - \frac{\hbar^2}{m_e a_B a_B/2} = 0.$$

Det siste resultatet viser at utviklingen av ψ_a i energiegentilstander også må inneholde bidrag for $E > 0$: Fordi $l = 0$ i begynnelsestilstanden, er det bare s-bølger som bidrar:

$$\psi_a = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \psi_{n00} + \int_0^{\infty} C(E)\psi_{E00} dE.$$

Forventningsverdien av energien kan da skrives som

$$\langle E \rangle_a = \sum_n |c_n|^2 E_n + \int_0^{\infty} |C(E)|^2 E dE.$$

For $a = \frac{1}{2}a_B$ må de to leddene på høyresiden være motsatt like store. I det første leddet er alle energiene E_n negative, slik at dette leddet er negativt. Med begynnelsestilstanden $\psi_{a_B/2}$ er det altså en betydelig sannsynlighet for å finne elektronet i en ubundet tilstand, med $E > 0$.