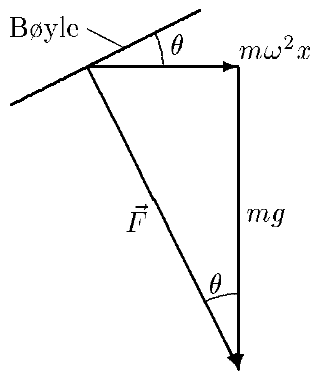
Eksamen i fag SIF 4002 FYSIKK
onsdag 3. mai 2000

Løsningsskisse

Oppgave 1



Hva er betingelsen for at kula skal være i balanse i en avstand x fra rotasjonsaksen?
Jo - totalkraften $\vec{F}$ må stå loddrett på bøylen (ingen komponent *langs* bøylen) - som illustrert til venstre.
Her er $\vec{F}$ lik vektorsummen av tyngdekraft og sentripetalkraft – og vinkelen θ på figuren er gitt av vinkelkoeffisienten dy/dx til bøylen i x.

Vi har dermed

$$\mathrm{tg}\,\theta = m\omega^2 x/mg = \mathrm{dy}/\mathrm{dx}$$

og følgelig

$$\boxed{\omega^2(x) = (g/x)\mathrm{dy}/\mathrm{dx}}$$

Derivasjon av $y(x)$ gir

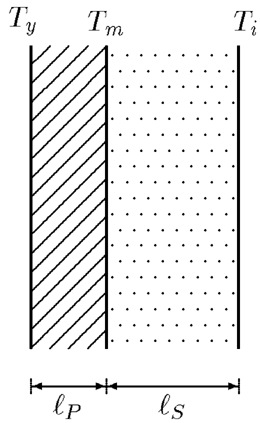
$$\mathrm{dy}/\mathrm{dx} = (\mathrm{x}/\mathrm{D}) + 2(\mathrm{x}/\mathrm{D})^3$$

som innsatt gir

$$\boxed{\omega^2 = (g/D)[1 + 2(x/D)^2]}$$

$$\boxed{\begin{array}{llllll} x \to 0: & \omega_A = \sqrt{g/D} & \text{og} & f_A = & \omega_A/2\pi & = 0.788\,Hz \\ x \to D: & \omega_B = \sqrt{3g/D} & \text{og} & f_A = & f_B\sqrt{3} & = 1.365\,Hz \end{array}}$$

Oppgave 2



ℓ_P : $1\,cm$ panel
ℓ_S : $2\,cm$ styropor.
Varmestrøm pr. flateenhet J_Q er

$$\left.\begin{aligned} J_Q &= \lambda_S(T_i - T_m)/\ell_S \\ J_Q &= \lambda_P(T_m - T_y)/\ell_P \end{aligned}\right\} \text{ og disse to er like}$$

Dermed er

$$\lambda_S(T_i - T_m)/\ell_S = \lambda_P(T_m - T_y)/\ell_P$$

som gir

$$\boxed{\begin{array}{l} T_m = (T_i + kT_y)/(1+k) \\ \text{hvor } k = (\lambda_P/\lambda_S)(\ell_S/\ell_P) \end{array}}$$

Innsatt i ett av uttrykkene for J_Q og ordnet gir dette (én av mange mulige skriveformer)

$$\boxed{J_Q = \frac{T_i - T_y}{\ell_P/\lambda_P + \ell_S/\lambda_S}}$$

Effekten P:
Varmestrømtetthet J_Q gjennom 6 like vegger med areale $h \times h$ gir

$$\underline{P} = 6h^2\,J_Q = 6 \cdot 6.25\,m^2 \cdot 33\,K/[(0.01/0.08 + 0.02/0.01)m^2/W \cdot K] = \underline{\underline{582\,W}}$$

Oppgave 3

a.

Vi tar utgangspunkt i en standard plan bølge av form

$$\xi(x,t) = \xi_0 \cos(kx - \omega t)$$

Sett fra en observatør med fart v_o i x-retning, og dermed posisjon

$$x(t) = x_o + v_o t$$

sees et tidsvariabelt signal

$$\xi(x(t),t) = \xi_o \cos(kx_o + kv_o t - \omega t) = \xi_o \cos(kx_o - \omega[1 - kv_o/\omega]t)$$

det vil si et signal som varierer med vinkelfrekvensen $\omega_o = \omega[1 - kv_o/\omega]$. Bølgens fasehastighet er $v_B = \omega/k$, og vi har dermed $\omega_o = \omega[1 - v_o/v_B]$ – eller, med frekvensen $f = \omega/2\pi$, tilsvarende for frekvensen;

$$\boxed{f_o = f(1 - v_o/v_B)}$$

Bruker vi så dette med først sender og så mottaker som observatør, og løser ut med hensyn på f, har vi

$$f = f_S/(1 - v_S/v_B) = f_M/(1 - v_M/v_B)$$

som gir den søkte sammenheng

$$\boxed{f_M = f_S \frac{1 - v_M/v_B}{1 - v_S/v_B}}$$

b.

Hvalen som <u>mottaker</u> av opprinnelig signal ser en frekvens som finnes ved å sette – i Dopplers formel – $f_S = f_o$, $v_S = 0$ og $v_M = -v_H$ (hvalen svømmer *mot* bølgeretningen):

$$f_H = f_0(1 + v_H/v_B)$$

Hvalen er så <u>sender</u> av reflektert signal, $v_S = +v_H$ (reflektert bølge i *samme* retning som bølgen), og frekvensen sett fra båten (nå $v_M = 0$) blir

$$f_R = f_H/(1 - v_H/v_B) = f_0(1 + v_H/v_B)/(1 - v_H/v_B)$$

Løses dette med hensyn på v_H/v_B, finnes

$$\boxed{v_H/v_B = (f_R - f_0)/(f_R + f_0)}$$

Lengden signalet går – med fart v_B – er fra båt til hval og tilbake, det vil si $2\,\ell_H$. Vi har dermed

$$\begin{aligned} \underline{\ell_H} &= (1/2)v_B\Delta t = (1/2)\cdot 1480 \cdot 0.25\,m = \underline{\underline{185\,m}} \\ \underline{v_H} &= v_B(f_R - f_0)/(f_R + f_0) = (1480\cdot 0.2/50)\,m/s = \underline{\underline{5.92\,m/s}} \end{aligned}$$

Oppgave 4

a.

Tyngdekraften Mg gir en forskyvning av massen M en lengde δ_0. Systemet er dermed ekvivalent med et 'vanlig fjærsystem med fjærkonstant

$$k : |F_{\text{fjær}}| = k\delta_0 = Mg$$

det vil si

$$k = Mg/\delta_0$$

Bevegelsesligningen for massen om likevektsposisjon $y = 0$ (hvor likevekts-fjærkraften balanserer ut tyngdekraften) er dermed (Newtons 2. lov)

$$F = -ky = (Mg/\delta_0)y = M\ddot{y}$$

som etter opprydding gir

$$\boxed{\ddot{y} + (g/\delta_0)\,y = 0}$$

som skulle vises.

Tallverdier:

$$\begin{aligned} \mathcal{I} &= ab^3/12 = 0.04 \cdot (0.08)^3/12\ m^4 = 1.7067 \cdot 10^{-6}\, m^4 \\ \omega_0^2 &= g/\delta_0 = 3E\mathcal{I}/(M\ell^3) \\ &= 3 \cdot 2 \cdot 10^{11}(N/m^2) \cdot 1.7067 \cdot 10^{-6}\, m^4/(250\, kg \cdot 4^3\, m^3) = 64.00\, s \end{aligned}$$

$$\boxed{\begin{aligned} \omega_0 &= 8\, s \\ T &= 2\pi/\omega_0 = 0.785\, s \end{aligned}}$$

b.

Med 4 sekker på plass og en manglende, er nedbøyningen 4/5 av full nedbøyning, og følgelig

$$\boxed{y_0 \equiv y(0^+) = \delta_0/5\ (= 0.03\, m)}$$

Fritt fall av sekk med masse $m = M/5$ en høyde h og energibevarelse $mgh \rightarrow mv^2/2$ gir en fart $\sqrt{2gh}$. Den tilsvarende impulsen mv deles så på 5 sekker i det uelastiske støtet, og gir en felles fart i negativ y-retning

$$\boxed{v_0 \equiv v(0^+) = -\sqrt{2gh}/5\ (= -0.686\, m/s)}$$

Fra løsningen har vi

$$y_0 = y(0) = A\cos\phi \qquad \text{og} \qquad v_0 = \dot{y}(0) = -\omega_0 A \sin\phi$$

hvorav finnes

$$\boxed{\begin{aligned} A = y_0\sqrt{1 + (v_0/\omega_0 y_0)^2} &= 0.0908\, m \\ \phi = \text{arctg}\,(-v_0/\omega_0 y_0) &= 1.234\, rad = 70.7^{\,o} \end{aligned}}$$

Oppgave 5

$\underline{p_0 V_0 T_0 \to p_1 V_1 T_1}$:

$p_1 V_1^\gamma = p_0 V_0^\gamma \Rightarrow (V_0/V_1)^\gamma = p_1/p_0 \Rightarrow V_0/V_1 = (p_1/p_0)^{1/\gamma}$
$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_0 V_0^{\gamma-1} \Rightarrow T_1/T_0 = (V_0/V_1)^{\gamma-1}$
og – med innsetting for V_0/V_1 –
$\boxed{T_1/T_0 = (p_1/p_0)^{(\gamma-1)/\gamma}}$

$\underline{p_1 V_1 T_1 \to p_2 V_1 T_0}$

$pV = nRT$ ved konstant volum $V = V_1 \Rightarrow p/T =$*konstant* – og dermed
$\boxed{T_0/T_1 = p_2/p_1}$
Så er det bare å sette $(T_1/T_0)(0 \to 1) = (T_1/T_0)(1 \to 2)$ – det vil si

$$(p_1/p_0)^{(\gamma-1)/\gamma} = p_1/p_2$$

og rydde opp:

$$(p_1/p_0)^{(\gamma-1)/\gamma} = (p_1/p_0)^{1-1/\gamma} = (p_1/p_0) \cdot (p_0/p_1)^{1/\gamma} \Rightarrow$$

$$(p_1/p_0)(p_0/p_1)^{1/\gamma} = p_1/p_2 \qquad \text{som kan skrives som}$$

$$\boxed{(p_1/p_0)^{1/\gamma} = p_2/p_0}$$

Ta så logaritmen til dette, $(1/\gamma)\ln(p_1/p_0) = \ln(p_2/p_0)$, og løs med hensyn på γ. Sett så $(p_1, p_2) = p_0 + (p_{g1}, p_{g2})$, og tilslutt $ln(1 + p_g/p_0) \approx p_g/p_0$. Og dermed fåes:

$$\boxed{\begin{aligned} \gamma \quad &= \ln(p_1/p_0)/\ln(p_2/p_0) = \ln(1 + p_{g_1}/p_0)/\ln(1 + p_{g2}/p_0) \\ &\approx (p_{g1}/p_0)/(p_{g2}/p_0) = p_{g1}/p_{g2} \end{aligned}}$$

som skulle vises.