Eksamen i fag SIF 4002 FYSIKK
mandag 3. mai 2001

Løsningsskisse

Oppgave 1

a.

Sammenheng vinkelhastighet-lineær hastighet: $\omega = v/r$
Energibevarelse: $V_{pot} = mgh_0 \to W_{kin} = mv_0^2/2 + I\omega_0^2/2$
Med innsatt $I\omega^2/2 = (mr^2/2) \cdot ((v/r)^2/2) = mv^2/4$
gir dette $mgh_0 = (3/4)mv_0^2$, det vil si

$$\boxed{v_0 = \sqrt{(4/3)gh_0}}$$

Støt:
Impulsbevarelse: $mv_0 \to mv_1 + MV_1$
Energibevarelse: $mv_0^2/2 + I\omega_0^2/2 \to mv_1^2/2 + I\omega_1^2/2 + MV_1^2/2$
Impulsbevarelsesligningen gir, med innsatt $M = (2/3)m$,

$$v_1 = v_0 - (2/3)V_1$$

og energibevarelsesligningen gir tilsvarende, med litt rydding,

$$v_0^2 = v_1^2 + (4/9)mV_1^2$$

Innsetting her for v_1^2 fra impulsbevarelsesligningen gir en enkel ligning for V_1, med løsning[1]

$$\boxed{V_1 = \sqrt{3gh_0}}$$

b.

Friksjonskraften er : $F_f = \mu Mg$.
Friksjonsarbeidet er: $W_f = F_f L = \mu MgL$.
Kinetisk energi rett etter støt reduseres med friksjonsarbeidet før klossen når bordkanten; det vil si[2] $MV_2^2/2 = MV_1^2/2 - W_f$. Med innsetting for V_1 fåes dermed

$$\boxed{V_2 = \sqrt{g(3h_0 - 2\mu L)}}$$

[1] Hvis man løser også for v_1, finner man $v_1 = 0$, det vil si hjulet stopper helt. Dette betyr at hvis man - som nokså mange kandidater gjorde til eksamen - skulle finne på å sette $v_1 = 0$ *a priori* - så får man det riktige svaret for V_1. Men med helt galt utgangspunkt –.

[2] En god del kandidater hadde greidd å *legge til* friksjonsarbeidet istedenfor å trekke fra, med resultat at friksjonen skulle ha *akselerert* klossen. Det må vel kunne karakteriseres som temmelig bevisstløst.

Kastbane – etter Galilei

Klossen forlater bordkanten med null hastighet i horisontalretningen. Den faller så med konstant akselerasjon g. Sammenhengen mellom fallhøyden h og falltiden t er dermed $h_2 = gt^2/2$ – det vil si

$$t = \sqrt{2h_2/g}$$

Horisontal lengde som er gått i denne tiden er $\ell_2 = V_2 t$, som med innsetting for V_2 og t gir

$$\boxed{\ell_2 = \sqrt{2h_2(3h_0 - 2\mu L)}}$$

Tallverdi: $\ell_2 = \sqrt{1.8}\,m = \underline{1.34\,m}$.

Oppgave 2

a.

Dreiemomentet på bjelken er

$$\tau = \text{arm } (2\ell/3) \times \text{fjærkraft } (-ky)$$

Tyngdekreftene er balansert av likevekts-fjærkraften, og skal ikke være med her. Ved små utslag er $y = \text{arm} \cdot \theta = (2\ell/3) \cdot \theta$, det vil si

$$\theta = 3y/2\ell \quad \text{og} \quad \omega = \dot{\theta} = (3/2)\ell\dot{y}$$

hvor θ er bjelkens vinkelutslag fra likevekt.

Dreiemomentligninge $\tau = I\mathrm{d}\omega/\mathrm{d}t$ kan dermed skrives på form

$$(2\ell/3) \cdot (-ky) = I \cdot (3/(2\ell))\,\ddot{y}$$

som etter opprydding gir

$$\boxed{\ddot{y} + (2\ell/3)^2(k/I)\,y = 0}$$

b.

Treghetsmomentet er, pr. definisjon, $I = \int r^2\,\mathrm{d}m$, hvor r er avstand fra $\mathrm{d}m$ til rotasjonsaksen, og

$$\mathrm{d}m = \text{masse/lengdeenhet} \cdot \mathrm{d(lengde)} = (m/\ell)\mathrm{d}r$$

Integrasjonen foetas fra $r = -\ell/3$ (venstre bjelkeende) til $r = 2\ell/3$ (høyre bjelkeende). Vi har dermed

$$\underline{I} = (m/\ell)\int_{\ell/3}^{2\ell/3} r^2\mathrm{d}r = m(\ell^2/3)\,[(2/3)^3 + (1/3)^3] = \underline{\underline{m\ell^2/9}}$$

Sammenhengen mellom svingetid T og vinkelfrekvens ω_0 er $T = 2\pi/\omega_0$. Vinkelfrekvensen ω_0 finnes fra svingeligningen (standardform $\ddot{y} + \omega_0^2 y = 0$) som

$$\omega_0^2 = (2\ell/3)^2\,(k/I)$$

Med innsetting for I fåes dermed

$$T^2 = \frac{(2\pi)^2 \cdot 9 \cdot (m\ell^2)}{4\ell^2 \cdot k \cdot 9} = \pi^2 m/k$$

det vil si

$$\boxed{T = \pi\sqrt{m/k}} \qquad \text{(uavhengig av lengden } \ell.\text{)}$$

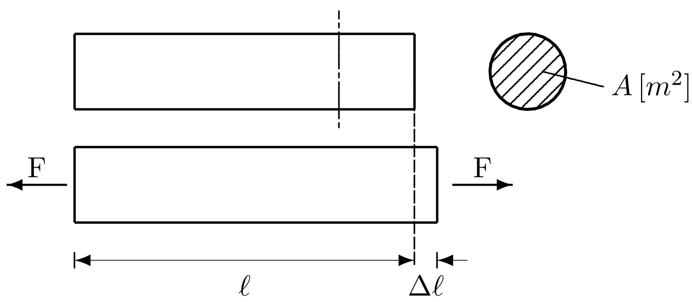
Løst med hensyn på fjærkonstanten k fåes – med tallverdier innsatt –

$$\boxed{k = m(\pi/T)^2 = 98.7\,N/m}$$

Oppgave 3

Fra kompendiet kapitel 3.1. hensettes:

Strekkelastitet



Betrakt en rett, homogen s-tav, med lengde ℓ og tverrsnitt A. Staven belastes med en strekk-kraft F, og dette resulterer i en forlengelse $\Delta\ell$.

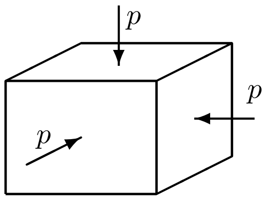
For 'elastisk lineære materialer' er den *relative forlengelse* eller *tøyningen* $\epsilon = \Delta\ell/\ell$ proporsjonal med *strekkspenningen* $T = F/A$

$\epsilon =$	$\Delta\ell/\ell$	Tøyning
$T =$	F/A	Strekkspenning $[Pa = N/m^2]$
$T =$	$E\,\epsilon$	Hookes lov (for strekk/trykk)

hvor E er *strekk-elastisitetsmodulen*

Volumelastisitet

Betrakt et legeme som er påkjent av et rent 'hydrostatisk trykk', som for eksempel en dykkerklokke nedsenket i havet. Kreftene står overalt loddrett på overflaten, og gir legemet en volumforandring proporsjonal med 'overtrykket' Δp.



'Trykkspenning' er det samme som
'hydrostatisk overtrykk'

$\epsilon_V =$	$\Delta V/V$	Volumtøyning
$T =$	Δp	Trykkspenning
$\Delta p =$	$-B\Delta V/V$	Hookes lov

hvor B er *volumelastisitetsmodulen*

Sammenhengen mellom volum- og strekkmodul
Et rent hydrostatisk trykk Δp gir samme strekk[3] $T = -\Delta p$ og samme tøyning i alle retninger. Tøyningene kan sees som satt sammen av rene strekk-tøyninger i trykk-kreftenes retninger og innsnevringer i retningene loddrett på trykk-kreftene:

$$\epsilon_x = T_x/E - \sigma T_y/E - \sigma T_z/E = -(1-2\sigma)\Delta p/E$$

og tilsvarende for ϵ_y og ϵ_z – de blir alle like. Volumforandringen kan dermed skrives som – om man antar en kloss med sidekanter x, y og z,

$$\begin{aligned} \Delta V &= \Delta(x\,y\,z) = (x+\Delta x)(y+\Delta y)(z+\Delta z) - x\,y\,z \\ &= V[(1+\epsilon_x)(1+\epsilon_y)(1+\epsilon_z) - 1] \stackrel{\epsilon \ll 1}{\approx} 3\,\epsilon\,V \end{aligned}$$

Fra definisjonen av volumelastisitetsmodulen B får vi dermed

$$\underline{B} = -\Delta p/(\Delta V/V) = -\Delta p/[-3(1-2\sigma)\Delta p/E] = \underline{(E/3)/(1-2\sigma)}$$

Tallverdi i denne oppgaven: $\underline{B = 167\,GPa}$

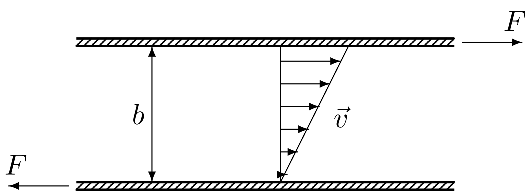
Oppgave 4

a.

Fra kompendiet kapitel 4.4. hensettes:

SKJÆRSPENNINGER OG VISKOSITET

'Viskositeten' eller 'seigheten' til en væske defineres enklest med referanse til figuren nedenunder.



En væske er begrenset av to plane, parallelle plater med innbyrdes avstand b. Den øvre platen beveger seg med en hastighet $\vec{v}$ relativt til den nedre platen.

Væsken hefter til platene, og får en hastighetsprofil som varierer lineært mellom platene, som vist.
'Bremsekraften' mellom platene må kompenseres ved at hver av platene trekkes med like og motsatt rettete krefter $\vec{F}$ parallelt med $\vec{v}$. For 'vanlige væsker' – såkalte

[3] trykk = negativt strekk

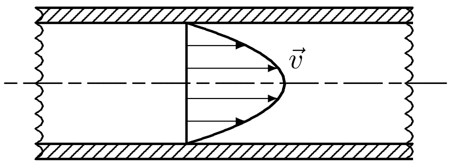
Newtonske væsker – er kraften proporsjonal med platearealet A og hastigheten og omvendt proporsjonal med plateavstanden b,

$$\begin{aligned} F &\propto A\,v/b, \qquad \text{det vil si} \\ T &\equiv F/A = \eta\, v/b \end{aligned}$$

hvor T er *skjærspenningen*, og proporsjonalitetsfaktoren η *skjærviskositeten*.

Viskøs rørstrømning: Poiseuilles formel

Vi skal ta for oss viskøs strømning gjennom et rør med sylindrisk tverrsnitt.



Et rør med radius R fører en væskestrøm $Q\,[m^3/s]$.
Væsken hefter til veggen, slik at $v(r = R) = 0$, mens symmetrien tilsier at $v(r = 0) = v_{max}$
som skissert på figuren.

For å overvinne viskøse tap, trenges et trykkfall per lengdeenhet langs røret $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$. Hva er sammenhengen mellom væskestrøm, rørradius og trykkgradient?

Dimensjonsanalyse

Formen på den søkte sammenhengen kan finnes enkelt ved dimensjonsanalyse: Væskestrømmen $Q\,[m^3/s]$ avhenger av viskositeten $\eta[Pa{\cdot}s]$, rørradius $R\,[m]$ og trykkgradient $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x\,[Pa/m]$. Vi antar en sammenheng av form

$$Q \propto \eta^\alpha\, R^\beta\, (\mathrm{d}p/\mathrm{d}x)^\gamma$$

og skal bestemme α, β og γ. Innsetting *bare av dimensjonene* gir

$$[m^3/s] = [Pa \cdot s]^\alpha\, [m]^\beta\, [Pa/m]^\gamma = [Pa]^{\alpha+\gamma}\, [m]^{\beta-\gamma}\, [s]^\alpha$$

For at venstre og høyre side skal bli like, må vi her ha $\alpha + \gamma = 0$; $\quad \beta - \gamma = 3$ og $\alpha = -1$, det vil si $(\alpha, \beta, \gamma) = (-1, 4, 1)$. Dermed blir den søkte sammenhengen av form

$$Q \propto (R^4/\eta)\, \mathrm{d}p/\mathrm{d}x$$

b.

Q_{tot} = volum/tid = lengde × flate/tid = fart × flate:

$$\boxed{Q_{tot} = v \cdot \pi D^2/4}$$

Strømmen gjennom hvert rør er $Q = Q_{tot}/4 = v \cdot \pi D^2/16$, og er etter Poiseuille

$$Q = (\pi/8)\,((d/2)^4/\eta) \cdot (\Delta p/h)$$

det vil si

$$\begin{aligned} \Delta p &= Q \cdot (\eta h/d^4) \cdot (128/\pi) \\ &= v \cdot (\eta D^2 h/d^4) \cdot ((128/\pi) \cdot (\pi/16)) \\ &= \underline{8 v \eta D^2 h/d^4} \end{aligned}$$

Kraften på stempelet – vi regner den negativ, siden den virker *mot* $\vec{v}$ – er[4]

$$\begin{aligned} F &= (-)\Delta p \cdot A = (-\Delta p) \cdot (\pi D^2/4) \\ &= -(2\pi\eta h D^4/d^4)\, v \equiv -b\, v \end{aligned}$$

Dermed har vi

$$\boxed{b = 2\pi\eta h\, (D/d)^4}$$

Tallverdi: $\underline{b = 164\, N/(m/s)}$.

Oppgave 5

Delprosessene 1-2 og 3-4 er isoterme, og beregnes dermed på samme måte. Tilsvarende er 2-3 og 4-1 isokore, og betegnes også på samme måte. Så la oss først ta de to prosesstypene hver for seg, generelt.

ISOTERME PROSESSER I IDÉELL GASS

Utgangspunkt er

$$\begin{aligned} pV &= nRT && \text{Tilstandsligningen} \\ \mathrm{d}Q &= \mathrm{d}U + \mathrm{d}W && \text{Energibevarelse/1. hovedsetning} \\ \mathrm{d}W &= p\mathrm{d}V && \text{Trykk-arbeid} \end{aligned}$$

Den indre energi U avhenger for en idéell gass bare av temperaturen, og dermed er her $\mathrm{d}U = 0$, og

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}W = p\mathrm{d}V$$

Her setter vi inn p fra tilstandsligningen, $p = nRT/V$ – og så integrerer vi fra tilstand a til tilstand b for å finne total varmemengde og totalt arbeid i delprosessen $a \to b$,

$$Q_{ab} = W_{ab} = \int_a^b p\mathrm{d}V = nRT \int_a^b \mathrm{d}V/V = nRT \int_a^b \mathrm{d}\ln V = nRT \ln(V_b/V_a)$$

ISOKORE PROSESSER I ÉNATOMIG IDÉELL GASS

Nå er volumet V konstant, og følgelig

$$\begin{aligned} \mathrm{d}W &= p\mathrm{d}V = 0 \\ \mathrm{d}Q &= \mathrm{d}U = nC_V\mathrm{d}T \end{aligned}$$

hvor C_V er varmekapasitet ved konstant volum, lik $3R/2$ for en énatomig gass.
Vi har dermed for isokore prosesser $c \to d$

$$\begin{aligned} &Q_{cd} = (3/2)\, nR\, (T_d - T_c) \\ &W_{cd} = 0 \end{aligned}$$

[4] Arealet av hullene skal *ikke* trekkes fra i stempelarealet - trykk-kreftene på hullåpningene overføres til hullveggene som (viskøse) skjærkrefter.

Vi har dermed – når vi setter inn $V_3 = V_2$, $V_4 = V_1$ og $\ln(V_4/V_3) = -\ln(V_3/V_4)$ følgende resultater:

$$\boxed{\begin{array}{ccrl} Q_{12} & = & W_{12} = & nRT_H \ln(V_2/V_1) \\ Q_{34} & = & W_{34} = & -\; nRT_L \ln(V_2/V_1) \\ Q_{23} & = & -Q_{41} = & -\; (3/2)\, nR\,(T_H - T_L) \end{array}}$$

Totalt arbeid i prosessen blir

$$\boxed{W = W_{12} + W_{34} = nR\,(T_H - T_L)\ln(V_2/V_1)}$$

og virkningsgraden blir

$$\boxed{e = W/Q_{12} = 1 - T_L/T_H}$$

Dette er samme virkningsgraden som for en Carnotprosess – hvor 2-3 og 4-1 er adiabatiske prosesser. Og Stirlingprosessen er på et vis en slags Carnotprosess; i og med at $-Q_{23}$ føres tilbake til prosessen som $+Q_{41}$, blir de to grenene *sett under ett* adiabatiske – ingen netto varme hverken ut eller inn.

Tallverdier

Arbeid og varmemengde i en syklus blir temmelig sprø, tallmessig.

Det var oppgitt $n = 4\,mol$ – og den som setter inn og regner ut trykket, finner at det tilsvarer et trykk av størrelsesorden $100\,atm$. Heldigvis hadde *ingen* av eksamenskandidatene gjort dette –.

Antall mol berører ikke beregning av virkningsgraden e.

Antall mol *burde* vært hundreparten, $n = 0.04\,mol$ – og dette ville gitt tallverdier

$$\begin{array}{ll} \underline{W} & = 0.04 \cdot 8.314 \cdot 90 \cdot \ln 4\,J = \underline{\underline{41.5\,J}} \\ \underline{Q_H} & = 0.04 \cdot 8.314 \cdot 373 \cdot \ln 4\,J = \underline{\underline{172\,J}} \\ \underline{e} & = 90/373 = \underline{\underline{0.24}} \end{array}$$