NORGES TEKNISK-
NATURVITENSKAPELIGE UNIVERSITET,
INSTITUTT FOR FYSIKK

EKSAMEN I EMNE SIF4002 FYSIKK
LØSNINGSSKISSE

Mandag 6. mai 2002
Tid: 0900 - 1500
Sensuren uke 22.

Hjelpemidler:
- B2 - Typegodkjent kalkulator,
- Matematisk formelsamling (K. Rottmann),
- Tabeller og formler i fysikk for 2FY og 3FY (Gyldendal)
- NB: Det finnes et utvalg av formler bakerst i denne oppgaveteksten.

Oppgavene gitt i det følgende inneholder i alt 18 delspørsmål. Hvert av disse delspørsmålene teller like mye ved utregning av den endelige karakteren.

Oppgave 1

Grunnenhetene i Système International d'Unités (SI-systemet) er kilogram (kg), sekund (s), meter (m) og ampere (A).

a) Newtons andre lov:

$$\frac{\mathrm{d}(mv)}{\mathrm{d}t} = F, \tag{1}$$

m er masse, v er hastighet, t er tid og F er kraft. Innsetting av dimensjoner gir

$$\underline{\underline{[F] = \frac{1}{\mathrm{s}}\ \mathrm{kg\ m/s} = \frac{\mathrm{kg\ m}}{\mathrm{s}^2} = \mathrm{Newton} = \mathrm{N}}} \tag{2}$$

b)

Mekanisk spenning = kraft per flateenhet.

Impulsstrømtetthet = impuls per flate og tidenhet.

Dimensjonen til kraft per flateenehet er $\mathrm{N/m^2} = ((\mathrm{kg\ m})/\mathrm{s}^2)/\mathrm{m}^2 = \mathrm{kg}/(\mathrm{m\ s}^2)$ = Pascal=Pa.

[Impulsstrømtetthet] = $\mathrm{kg\ (m/s)/(m^2\ s)} = \mathrm{kg/(m\ s^2)}$

Ved å sammenlikne utrykkene for dimensjonen til henholdsvis trykk og impulsstrømtetthet ser man direkte at dimensjonen for disse to størrelsene er den samme.

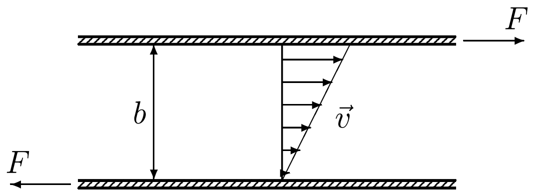
c) Ved bruk av standard framgangsmåten for dimensjonsanalyse får man at

$$[\text{distanse}] = [\text{akselrasjon}]^\alpha \times [\text{tid}]^\beta \tag{3}$$
$$\mathrm{m} = (\mathrm{m/s^2})^\alpha \times \mathrm{s}^\beta = (\mathrm{m})^\alpha \mathrm{s}^{\beta-\alpha} \tag{4}$$

Dette gir at $\alpha = 1$ og $\beta - 2\alpha = 0$, som innebærer at

$$\underline{\underline{d = f(a,t) \propto\ a\, t^2.}} \tag{5}$$

d) Figur som illusterer definisjonen av skjærviskositet



Fra uttrykket gitt i oppgaveteksten får man at

$$\eta = T_{xy} / \frac{\partial v_x}{\partial y} \tag{6}$$

og at

$$\underline{\underline{[\eta] = \frac{\mathrm{N/m^2}}{\mathrm{(m/s)/m}} = \frac{\mathrm{N\ s}}{\mathrm{m^2}} = \mathrm{Pa\ s} = \frac{\mathrm{kg}}{\mathrm{m\ s}}}} \tag{7}$$

Gitt at væskestrømmen Q i et rør kan uttrykkes ved rørradien R, skjærviskositeten η og trykkgradienten $\mathrm{d}p/\mathrm{d}x$. Man har dermed at

$$[Q] = [\mathrm{R}]^{\alpha} [\eta]^{\gamma} [\mathrm{d}p/\mathrm{d}x]^{\beta} \tag{8}$$

$$[\mathrm{m^3/s}] = \mathrm{m}^{\alpha}\ (\mathrm{kg/(ms)})^{\gamma}\ (\mathrm{kg/(ms^2)/m})^{\beta} = \mathrm{m}^{\alpha-\gamma-2\beta}\ \mathrm{kg}^{\beta+\gamma}\ \mathrm{s}^{-\gamma-\beta} \tag{9}$$

Dette gir følgende likninger

$$3 = \alpha - \gamma - 2\beta \tag{10}$$

$$0 = \beta + \gamma \tag{11}$$

$$-1 = -\gamma - 2\beta \tag{12}$$

Løsning av disse liknigene gir $\underline{\underline{\alpha = 4, \quad \gamma = -1 \text{ og } \beta = 1}}$, som er i overenstemmelse med den oppgitte formelen.

Oppgave 2

a) For et system med konstant masse gir Newtons andre lov at

$$\frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = F_x/m. \tag{13}$$

Når F_x er konstant, kan man lett finne hastigheten ved å integrere over tida, hvilket gir

$$v_x(t) = v_x(0) + \int_0^t \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t'} \mathrm{d}t' = v_x(0) + \int_0^t \frac{F_x}{m} \mathrm{d}t' = \underline{\underline{v_x(0) + \frac{F_x}{m} t}}. \tag{14}$$

Fordi

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t}, \tag{15}$$

kan man finne posisjonen som funksjon av tida ved å integrere uttrykket for hastigheten funnet i likning (14) over tida. Forutsatt at krafta $\vec{\boldsymbol{F}}$ er konstant gir dette

$$x(t) = x(0) + \int_0^t \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t'} \mathrm{d}t' = x(0) + \int_0^t \left\{ v_x(0) + \frac{F_x}{m} t' \right\} \mathrm{d}t' = \underline{\underline{x(0) + v_x(0)t + \frac{1}{2} \frac{F_x}{m} t^2}}. \tag{16}$$

b) Samme beregninga som under punkt a) skrevet på vektor form gir

$$\vec{\boldsymbol{v}}\ (t) = \vec{\boldsymbol{v}}\ (0) + \int_0^t \frac{\mathrm{d}\,\vec{\boldsymbol{v}}}{\mathrm{d}t'} \mathrm{d}t' = \vec{\boldsymbol{v}}\ (0) + \int_0^t \frac{\vec{\boldsymbol{F}}}{m} \mathrm{d}t' = \underline{\underline{\vec{\boldsymbol{v}}\ (0) + \frac{\vec{\boldsymbol{F}}}{m} t}}, \tag{17}$$

hvor det er forutsatt at krafta $\vec{\boldsymbol{F}}$ er konstant. Fordi

$$\vec{\boldsymbol{v}}\,(t) = \frac{\mathrm{d}\,\vec{\boldsymbol{r}}\,(t)}{\mathrm{d}t}, \tag{18}$$

kan man finne posisjonen $\vec{\boldsymbol{r}}\,(t)$ som funksjon av tida ved å integrere uttrykket for hastigheten $\vec{\boldsymbol{v}}\,(t)$ funnet i likning (17) over tida

$$\vec{\boldsymbol{r}}\,(t) = \vec{\boldsymbol{r}}\,(0) + \int_0^t \frac{\mathrm{d}\,\vec{\boldsymbol{r}}}{\mathrm{d}t'}\mathrm{d}t' = x(0) + \int_0^t \left\{ \vec{\boldsymbol{v}}\,(0) + \frac{\vec{\boldsymbol{F}}}{m}\,t' \right\} \mathrm{d}t' = \underline{\underline{\vec{\boldsymbol{r}}\,(0) + \vec{\boldsymbol{v}}\,(0)t + \frac{1}{2}\frac{\vec{\boldsymbol{F}}}{m}t^2}}. \tag{19}$$

På komponent form kan disse resultatene skrives

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} v_x(t) \\ v_y(t) \\ v_z(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v_x(0) \\ v_y(0) \\ v_z(0) \end{pmatrix} + \int_0^t \frac{1}{m} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \mathrm{d}t' \\
&= \begin{pmatrix} v_x(0) \\ v_y(0) \\ v_z(0) \end{pmatrix} + \frac{1}{m} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} t \qquad (20) \\
\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} x(0) \\ y(0) \\ z(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} v_x(0) \\ v_y(0) \\ v_z(0) \end{pmatrix} t + \frac{1}{2m} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} t^2. \qquad (21)
\end{aligned}$$

Løsninga for spesialtilfellet $\vec{\boldsymbol{r}}\,(0) = \{0, 0, 0\}$ og $\vec{\boldsymbol{v}}\,(0) = \{v_0, 0, 0\}$ fås ved innsetting i det to siset likingene. Eller man kan beregne bevegelsen i henholdsvis x-,y- og z-retning hver for seg (superposisjon) fordi $\vec{\boldsymbol{F}}\,(\vec{\boldsymbol{r}}) = \{F_x(x), F_y(y), F_z(z)\}$ (alle komponentene er konstanter).

c) Arbeid er definert som

$$\mathrm{d}W = \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \mathrm{d}\,\vec{\boldsymbol{s}}, \tag{22}$$

hvor d $\vec{\boldsymbol{s}}$ utgått vei i kraftas retning. I varmelærea bruker mant at $\mathrm{d}W = p\mathrm{d}V$. Dimensjonen til det siste uttrykket er $(N/m^2)m^3 = N\ m$ som er det samme som for $\mathrm{d}W = \vec{\boldsymbol{F}} \cdot \mathrm{d}\,\vec{\boldsymbol{s}}$. De to ulike utrykkene for arbeid er derfor fullt ut konsistente, dvs. i overenstemmelse med hverandre.

d) Som eksempel på et konservativt potensial er det her naturlig å se på potensiell energi som skyldes feks. gravitsjonskrefter eller friksjonsfrie fjærer. At den potensielle energien i disse tilfellene kan beskrives som et konservativt potensial vil si at all energi som tilføres et slikt system fås tilbake når systemet bringes tilbake til starttilstanden.

Statisk likevekt er karakterisert ved at hastigheten $\vec{\boldsymbol{v}} = 0$ og dermed at $\mathrm{d}(m\,\vec{\boldsymbol{v}})/\mathrm{d}t = \vec{\boldsymbol{0}}$. Dette betyr at $\vec{\boldsymbol{F}} = \mathrm{d}(m\,\vec{\boldsymbol{v}})/\mathrm{d}t = \vec{\boldsymbol{0}}$.

Fordi

$$\vec{\boldsymbol{F}} = -\left\{ \frac{\partial V(x,y,x)}{\partial x}, \frac{\partial V(x,y,x)}{\partial y}, \frac{\partial V(x,y,x)}{\partial z} \right\} \tag{23}$$

innebærer dette at stabil statisk likevekt alltid svaret til et minimum i den potensielle energien.

For et endimensjonal problem gir rekkeutvikling rundt punktet som svarer til statisk likevekt alltid

$$V(x) = V(x_0) + \left.\frac{\mathrm{d}V(x)}{\mathrm{d}x}\right|_{x=x_0}(x - x_0) + \frac{1}{2}\left.\frac{\mathrm{d}^2V(x)}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x=x_0}(x - x_0)^2 + \ldots$$

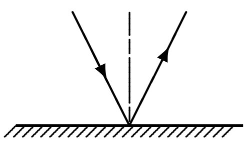
Fordi $\mathrm{d}V(x)/\mathrm{d}x = 0$ har man derfor at for små avvik fra statisk likevekt gjelder

$$V(x) - V(x_0) = \frac{1}{2} \left. \frac{\mathrm{d}^2 V(x)}{\mathrm{d}x^2} \right|_{x=x_0} (x - x_0)^2, \tag{24}$$

som er et harmonisk potensial med samme matemiske form som det man finner for f.eks. lineræe fjærer. Det matematiske apparat for analyse av slike systemer er godt utviklet.

e) (Eksamenssettets mest krevende oppgaven)

Vi skal finne et uttrykk for *trykket mot veggen*, det vil si for *midlere kraft per flateenhet* som følge av støt mellom vegg og gassmolekyler. Dette gjør vi ved først vilkårlig å velge ut én partikkel, finne hvor mye denne partikkelen midlet over lang tid bidrar til trykket – og så multiplisere med antall partikler.

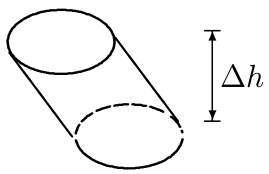


Til venstre er illustrert refleksjon av (vår utvalgte) partikkel fra veggen. Den faller inn mot veggen med hastighet $\vec{\boldsymbol{v}}$, som kan deles i en komponent $\vec{\boldsymbol{v}}_\parallel$ langs veggen og en komponent $\vec{\boldsymbol{v}}_\perp$ loddrett på veggen. Ved støtet mot veggen er $\vec{\boldsymbol{v}}_\parallel$ uforandret, mens $\vec{\boldsymbol{v}}_\perp \rightarrow -\vec{\boldsymbol{v}}_\perp$.

Impulsen overført til veggen ved støtet er dermed

$$\Delta\vec{P} = 2m\,\vec{\boldsymbol{v}}_\perp \qquad \text{– eller –} \qquad \Delta P_\perp = 2mv_\perp \tag{25}$$

Vi skriver her 'stor P' for impulsen, og reserverer 'liten p' for trykket.



ΔA

Vi betrakter nå et lite element ΔA av veggen, og et lite tidsintervall Δt.
For at 'vår partikkel'skal treffe veggen i løpet av tiden $(t, t + \Delta t)$, må den ved tiden t være en avstand mindre enn $\Delta h = v_\perp \Delta t$ fra veggen, det vil si innenfor en sylinder med volum $\Delta V = \Delta A \cdot \Delta h = v_\perp \Delta A \cdot \Delta t$.

Og – i middel kan partikkelen være hvor som helst i hele volumet V, så sannsynligheten $S^{(V)}$ for å finne den i ΔV ved gitt tid t blir

$$S^{(V)} = \Delta V/V = v_\perp \Delta A \Delta t/V \tag{26}$$

Videre er, ved gitt tallverdi av $\vec{\boldsymbol{v}}_\perp$, sannsynligheten $S^{(+)}$ for at retningen skal være *mot* veggen og ikke *fra* veggen

$$S^{(+)} = 1/2 \tag{27}$$

'Vår partikkel' gir dermed, midlet over lang tid, en midlere impuls til ΔA i en tid Δt på

$$\begin{aligned} \Delta P_\perp &= S^{(+)} \cdot S^{(V)} \cdot (2mv_\perp) \\ &= (1/2) \cdot (v_\perp \Delta A \Delta t/V) \cdot (2mv_\perp) \\ &= mv_\perp^2 \Delta A \Delta t/V \end{aligned} \tag{28}$$

Nå er, etter Newtons 2. lov, *kraft = impulsforandring/tidsenhet*, og videre er *trykk = kraft/flateenhet*. 'Vår partikkel' gir dermed et bidrag til *trykket* mot ΔA på

$$\Delta p = (\Delta P_\perp/\Delta t)/\Delta A = mv_\perp^2/V \tag{29}$$

Og så gjør vi det samme for alle partiklene i volumet V, og summerer bidragene. Dermed blir det totale trykket

$$p = \sum_{i=1}^{N} \Delta p_i = m \sum_{i=1}^{N} (v_\perp^2)_i / V \tag{30}$$

Etter definisjonen av middelverdi kan summen her skrives som

$$\sum_{i=1}^{N} (v_\perp^2)_i = N\,\overline{v_\perp^2} \tag{31}$$

Nå er total midlere kvadratiske hastighet lik summen av kvadratene av hastighetene i hver av tre retninger (Pythagoras), $\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2}$, og når ingen retning er preferert, blir midlere kvadratisk hastighet i én retning lik $\overline{v^2}/3$. Uttrykket for (midlere) trykk p kan dermed skrives som

$$p = (1/3)\, Nm\overline{v^2}/V \tag{32}$$

Midlere kinetisk energi per partikkel er $E = m\overline{v^2}/2 = (3/2) \cdot (1/3) m\overline{v^2}$. Bruker vi dette, og flytter V over til venstre side av ligningen, står vi igjen med

$$\boxed{pV = N \cdot \frac{2}{3} E} \qquad \text{hvor} \qquad E = \frac{1}{2} m\overline{v^2}. \tag{33}$$

Oppgave 3

a) For roterende stive legemer antar Newtons 2. lov følgende form

$$I\ddot{\theta} = \tau, \tag{34}$$

hvor I er treghetsmomentet som for en samling av N diskrete punkter er defnert som

$$I := \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2, \tag{35}$$

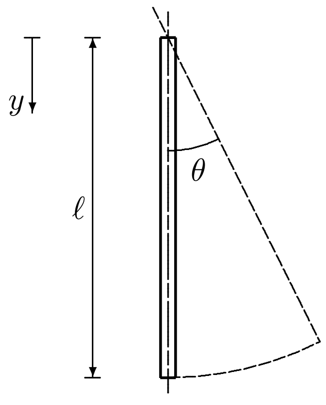
hvor m_i er massen til massepunkt i og r_i er dette punkts avstand fra rotasjonsaksen.

Størrelsen av dreiemomentet er definert som

$$\tau = |\, \vec{\boldsymbol{F}} \times \vec{\boldsymbol{r}}\, |, \tag{36}$$

hvor $\vec{\boldsymbol{F}}$ er krafta som virker på et punkt på legemet og $\vec{\boldsymbol{r}}$ er den kartesiske posisjonsvektoren til dette punktet.

b)



En tynn, homogen stav med lengde ℓ og masse m er hengt opp friksjonsfritt på en aksling med senter gjennom det ene endepunktet.
Avstanden fra rotasjonsaksen til tyngdepunkt er da $d = \ell/2$.

Treghetsmomentet til staven om rotasjonsaksen kan skrives som summen av treghetsmomentene for elementer av aksen mellom y og $y + \Delta y$;

$$I = \sum \Delta I = \sum y^2 \,\Delta m = \sum y^2 \cdot (m\,\Delta y/\ell) \tag{37}$$

$$\rightarrow (m/\ell) \int_{y=0}^{\ell} y^2 \,\mathrm{d}y = \frac{1}{3} m\,\ell^2 \tag{38}$$

Svingetida, ved små utslag, blir dermed

$$\begin{aligned} T &= 2\pi/\omega_0 = 2\pi\sqrt{I/mgd} = 2\pi\sqrt{\frac{1}{3}m\ell^2/(mg\ell/2)} \\ &= 2\pi\sqrt{\ell/g} \cdot \sqrt{2/3}, \end{aligned} \tag{39}$$

dvs. $\sqrt{2/3} = 0.8165$ ganger svingetida for en matematisk pendel med samme lengde.

c) Skal her vise at $y = f(x \pm vt)$ er en løsning av bølgelikninga

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - v^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = 0. \tag{40}$$

For å få dette til trenger vi følgende utrykk som fås ved bruk av kjerneregelen og ankelsen om at v er konstant

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \pm v f'(x \pm vt) \;\text{ og }\; \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = (\pm v)^2 f''(x \pm vt) \tag{41}$$

$$\frac{\partial y}{\partial x} = f'(x \pm vt) \;\text{ og }\; \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = f''(x \pm vt) \tag{42}$$

Innsatt i bølgelikninga ser man $y = f(x \pm vt)$ er en løsning.

Parmetet v er forplantningshastigheten til bølga.

Ei vandrende bølge er ei bølge som brer seg utover slik som bølga baskrevet at $y = f(x \pm vt)$.

Ei stående bølge er ei bølge hvor knutepunktet og maksima ikke flytter seg som funsjon av tida, feks. $y(x,t) = sin(kx)sin(wt)$.

I longitudinelle bølger er alle forflytninger assosisert med bølga parallell med forplantningsretningen (Eksempel: lydbølger). I transverselle bølger er alle forflytninger assosisert med bølga normalt på forplantningsretningen (Eksempel: fiolin streng).

d) Når to like sterke vandrebølger møtes i et punkt vil man får helt forskjellig reslutat avhengig av om de to bølgene er i fase eller ikke. Er bølgene fase får man et forsterket utslag (konstruktiv interferns). Er bølgene i motfase vil man i prinsippet få null utslag (destruktiv interferns).

Stående bølger kan sees på som reslutatet av interferens mellom to bølger som møtes. Et annet eksempel er lyden som øret oppfatter hvis man hører på samme tone fra to ulike høgtalere som er plassert et stykke fra hverandre. Hvor sterk lyden fortoner ser for øret vil i dette tilfellet endres etter hver som øret flyttes rundt.

Oppgave 4 (Termisk fysikk).

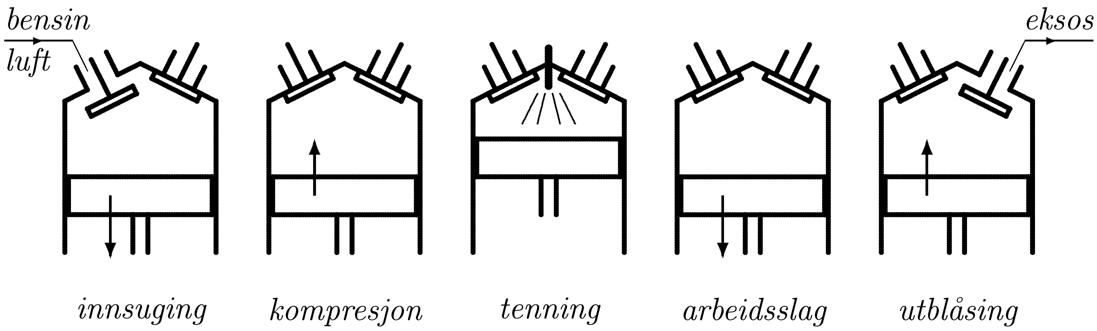
a) Varmelæras 1. hovesetning lyder

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U + \mathrm{d}W, \tag{43}$$

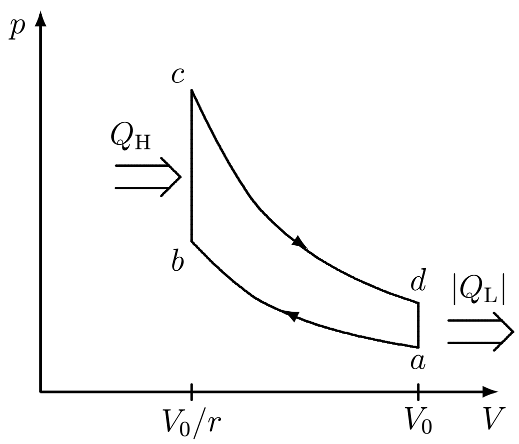
hvor $\mathrm{d}Q$ er varmeenergi tilført systemet, $\mathrm{d}U$ er endring i indre energi (kinetisk og potesielle energi) og $\mathrm{d}W$ arbeid utført av systemet på omgivelsene.

b) En arbeidssyklus for en vanlig 4-takts bensinmotor er vist nedenfor. Bensin-luft blanding fra forgasseren suges inn i sylinderen (nedadgående stempel, åpen innsugningsventil).

blandinga komprimeres (oppadgående stempel, lukkete ventiler). Tennpluggen slår gnist ved maksimal kompresjon og blandinga forbrenner nær momentant, og stemplet drives nedover og utfører arbeid. Tilslutt blåses forbrente gasser ut (oppadgående stempel, åpen utblåsingsventil).



En idealisert modell av en syklus er vist i pV-diagram nedenfor.



Otto-syklus.

Vi starter etter innsugningen, når sylindervolumet V_0 er fylt med gass-bensin blanding ved lav temperatur (punkt a i diagrammet, temperatur T_a).

Gassen komprimeres så adiabatisk (pV^γ =konstant), til et minste volum V_0/r (punkt b i diagrammet, temperatur T_B), hvor faktoren r er *kompresjonen.*

Så forbrenner gassen, fort, slik at stemplet ikke får flyttet seg – dvs. ved konstant volum. Gassen tilføres da forbrenningsvarmen Q_H, og vi når punkt c i diagrammet (temperatur T_c).

Og så kommer *arbeidsslaget*, gassen ekspanderer adiabatisk tilbake til volum V_0 (punkt d i diagrammet, temperaturen T_d).

Tilslutt blåses gassen ut, kjøles av og avgir varmemengde $|Q_\mathrm{L}|$ – og så begynner man på nytt med samme mengde kald gass (tilbake i utgangspunktet a).

Kompresjonen fra a til b i pV-diagrammet er tilnærmet adiabatisk og for denne delen av prosessen har man at

$$TV^{\gamma-1} = \text{konstant}, \tag{44}$$

hvor T er lik den absolutte temperaturen og γ er adiabatkonstanten. Dvs. at

$$T_b V_b^{\gamma-1} = T_a V_a^{\gamma-1}, \tag{45}$$

og dermed

$$T_b = (r)^{\gamma-1} T_a \tag{46}$$

hvor kompresjonsforholdet er definert som

$$r := V_a/V_b. \tag{47}$$

c) Noen formuleringer av varmelæras 2. hovedsetning

- Det er umulig å flytte varme fra et kaldt til et varmt reservoar uten å utføre
- Det er umulig å transformere varme til arbeid uten å tape spillvarme.
- Det er umulig å lage en kretsprosess som er mer effektiv enn Carnotprosessen.
- Perpetuum mobile av 2. art er umulig.

d) Carnot-prosessen er *den teoretisk maksimalt effektive* termodynamiske kretsprosess som tenkes kan:

Carnot-syklus

For at en kretsprosess skal gi minimalt med tap, må følgende være oppfylt:

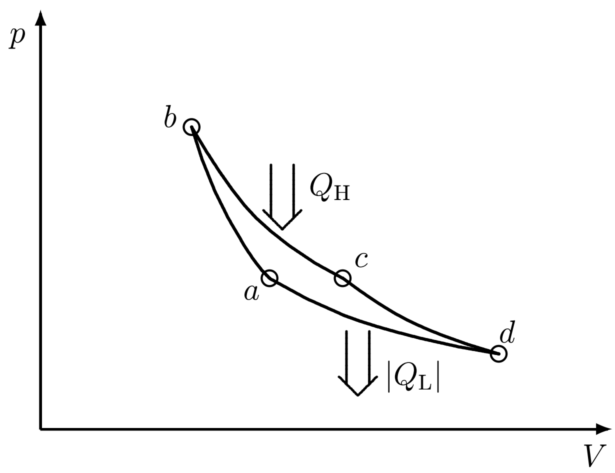
1. Prosessen må være reversibel. Irreversible prosesser gir *alltid* ekstra 'kaotisk energi'.

2. Varmeledning drevet av et endelig temperaturfall ΔT er en irreversibel prosess. Varmeoverføring må følgelig skje *isotermt.*

3. Under de trinn i prosessen hvor $\Delta T \neq 0$, må det ifølge dette *ikke* overføres varme, dvs. disse trinnene må være *adiabatiske.*

En Carnot-syklus, i den enkleste form, vil dermed være sammensatt av to isoterme og to adiabatiske prosesser.

e) Carnot-prosess i en idéell gass



Til venstre er vist en Carnot-prosess for en idéell gass, tegnet med $\gamma = \mathcal{C}_p/\mathcal{C}_V = 5/3$ (dvs. for en énatomig gass).

a–b: adiabatisk ($pV^\gamma =$ konst.)
b–c: isoterm ($pV =$ konst.)
c–d: adiabatisk
d–a: isoterm

Vi skal beregne virkningsgraden $e = W/Q_\mathrm{H} = 1 - |Q_\mathrm{L}|/Q_\mathrm{H}$.

Isotermene b–c og d–a:
Temperaturen er konstant, og følgelig er indre energi konstant og $\mathrm{d}U = 0$. Dermed er arbeidet lik tilført varmemengde, $\mathrm{d}Q = \mathrm{d}U + \mathrm{d}W \to \mathrm{d}W$, og vi har

$$\mathrm{d}Q = \mathrm{d}W = p\mathrm{d}V = (Nk_\mathrm{B}T/V)\mathrm{d}V = Nk_\mathrm{B}T\,\mathrm{d}\ln V. \tag{48}$$

Brukt på de to isotermene fåes dermed

$$\begin{aligned} Q_\mathrm{H} &= Nk_\mathrm{B}T_\mathrm{H}\int_b^c \mathrm{d}\; lnV &&= Nk_\mathrm{B}T_\mathrm{H}\ln(V_c/V_b) \\ Q_\mathrm{L} &= \quad\ldots &&= Nk_\mathrm{B}T_\mathrm{L}\ln(V_a/V_d) \;\; [< 0]. \end{aligned} \tag{49}$$

Adiabatene a–b og c–d:
$TV^{\gamma-1} =$ konst. dvs. $V \propto (1/T)^{1/(\gamma-1)}$.

Dertil er (fra isotermene) $T_c = T_\mathrm{B}$ og $T_a = T_d$, og volumene V_d og V_a kan dermed skrives

$$\begin{aligned} V_d &= V_c(T_c/T_d)^{1/(\gamma-1)} = V_c(T_\mathrm{B}/T_a)^{1/(\gamma-1)} \\ V_a &= V_b(T_\mathrm{B}/T_a)^{1/(\gamma-1)} \\ &\text{og følgelig} \\ V_a/V_d &= V_b/V_c \qquad . \end{aligned} \tag{50}$$

For prosessen totalt får vi dermed, når vi setter inn siste resultatet i uttrykkene for Q_H og Q_L (og bruker at $\ln x = -\ln(1/x)$)

$$\begin{aligned} &Q_\mathrm{L}/Q_\mathrm{H} = -T_\mathrm{L}/T_\mathrm{H} \\ &e = 1 - T_\mathrm{L}/T_\mathrm{H}. \end{aligned} \tag{51}$$

Virkningsgraden e avhenger følgelig *bare* av temperaturforholdet $T_\mathrm{L}/T_\mathrm{H}$.

Problemet med alle varmekraftmaskiner er varmenergien Q_L som feks. i biler hvor litt går med til å vamre fører og pasasjerer, men hvor det aller meste går med til å vamre kråkene. De er dette som går at virkingsgraden blir så dårlig som den er. Passer man imidlertid på å la temperaturen assosiert med Q_L være høg nok til at man kan la Q_L gå inn i et fjernvarmeanlegg for indudri og private husholdninger er ikke Q_L lengre å regne som tapt varme og i prinsippet tilnærmet all energi som ble frigjort feks. ved forbrenninga av gassen har kommet til nytte. Utslippet av CO_2 er en annen sak og er ikke blant de tema som inngår i varmelæra.