Eksamen SIF 4003 7/12-1998.

Oppgave 1.

a) Gauss: $\oiint \vec{E}\, d\vec{A} = \frac{q}{\varepsilon}$

i) $a < r < b$: Sylindrisk Gaussflate, lengde l.

$$\oiint \bar{E}\, d\bar{A} = E(r)\cdot 2\pi r l = \frac{\lambda_1 \cdot l}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\vec{E}(\bar{r}) = \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0 r}\cdot \hat{r}}$$

ii) $r > R$:

$$\oiint \bar{E}\, d\bar{A} = E(r)\cdot 2\pi r l = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)\cdot l}{\varepsilon_0}$$

$$E(r) = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)}{2\pi\varepsilon_0 r}$$

$$\underline{\bar{E}(\bar{r}) = \frac{(\lambda_1 + \lambda_2)\,\hat{r}}{2\pi\varepsilon_0 r}}$$

b) i) I et metall må det elektriske feltet være null fordi vi i motsatt fall vil ha en strøm i lederen ⇒ Overflateladninger lager motfelt til påtrykt felt.

ii) Ladning pr lengdeenhet i indre sylindervegg av ytre sylinder er λ_{2i}

Ladning pr lengdeenhet i ytre sylindervegg er λ_{2y}.

$$\lambda_{2i} + \lambda_{2y} = \lambda_2$$

Vi legger en Gaussflate i ytre sylinder. Den ladningen som befinner seg innenfor, er $(\lambda_1 + \lambda_{2i}) \cdot l$. $E(r) = 0$ i metallet.

$$E(r) \cdot 2\pi r l = \frac{(\lambda_1 + \lambda_{2i}) \cdot l}{\varepsilon} = 0$$

$$\underline{\lambda_{2i} = -\lambda_1}$$

$$\lambda_{2y} = \lambda_2 - \lambda_{2i} = \underline{\lambda_2 + \lambda_1}$$

c) Potensialforskjellen mellom indre og ytre sylinder, dvs mellom a og b

$$\Delta V = V_a - V_b = -\int_b^a \bar{E}(\bar{r})\, d\bar{r} = -\frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0}\int_b^a \frac{1}{r} \cdot dr$$

$$= \frac{\lambda_1}{2\pi\varepsilon_0} \ln\frac{b}{a}$$

Kapasitans pr lengdeenhet

$$C = \frac{\lambda_1}{V_a - V_b} = \underline{\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln b/a}}$$

d) $$\frac{\text{Energi}}{\text{lengde}} = \frac{1}{2}\frac{QV}{\text{lengde}} = \frac{1}{2}\lambda_1(V_a - V_b) = \frac{\lambda_1^2}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

Alternativt: Energitetthet/lengde $= u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \cdot \frac{1}{l}$

$$\frac{\text{Energi}}{\text{lengde}} = \int_a^b \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2 \frac{1}{l} \cdot 2\pi r\, dr \cdot l$$

$$= \int_a^b \frac{1}{2}\varepsilon_0 \frac{\lambda_1^2}{4\pi^2\varepsilon_0^2 r^2} \frac{2\pi r l\, dr}{l} = \frac{\lambda_1^2}{4\pi\varepsilon_0}\ln\frac{b}{a}$$

Elektrostatisk energi i kondensatoren i lengde x

$$U_1 = \frac{\lambda_1^2 \cdot x}{4\pi\varepsilon_0} \ln\frac{b}{a}$$

Når pluggen er satt i, blir energien

$$U_2 = \frac{\lambda_1^2 \cdot x}{4\pi\varepsilon} \ln\frac{b}{a} \quad \text{der } \varepsilon = \varepsilon_0 \cdot \kappa$$

Endring ved at pluggen settes inn:

$$\Delta U = U_2 - U_1 = \frac{\lambda_1^2 x}{4\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_0}\right) \ln\frac{b}{a}$$

$$= \underline{\frac{\lambda_1^2 x}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\kappa} - 1\right) \ln\frac{b}{a}}$$

e) ΔU er negativ, dvs den potensielle energien minker. $\Rightarrow$ Pluggen dras innover.
Kraften er

$$F = -\frac{dU}{dx} = -\frac{\lambda_1^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\kappa} - 1\right) \ln\frac{b}{a} = \underline{\frac{\lambda_1^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(1 - \frac{1}{\kappa}\right) \ln\frac{b}{a}}$$

Oppgave 2.

Generell formel for Dopplereffekt

$$f_{mott.} = \frac{v + v_{mott.}}{v + v_{send.}} \cdot f_{send.}$$

når mottager er i $x=0$, sender er på positiv x-akse. v er lydhastigheten i mediet (luft) v_{mott} og $v_{send.}$ er positive når de er rettet langs positive x-akse, negative når de er rettet langs negative x-akse.

a) $f_m = \frac{336+8}{336-9} \cdot f_1$

Deretter blir f_m sendefrekvensen (refleksjons-frekvensen) fra møllen, og flaggermusen blir mottaker: x-aksen bytter da retning:

$$f_2 = 83\,kHz = \frac{336+9}{336-8} \cdot f_m$$

$$f_m = \frac{83{,}0 \cdot 328}{345}\,kHz \qquad = \underline{78{,}9\,kHz}$$

b) $f_1 = f_m \cdot \frac{336-9}{336+8} = 78{,}9 \cdot \frac{327}{344}\,kHz = \underline{75{,}0\,kHz}$

c) Gangveiforskjellen for lyden fra de to kildene til observatøren vil variere med omdreiningsvinkelen α.

$\Delta s = L\cos\alpha$ = veilengdeforskjellen

Intensiteten $I = I_{max} \cdot \cos^2\left(\frac{\varphi}{2}\right)$

der $\varphi = \frac{2\pi\Delta s}{\lambda} = \frac{2\pi L\cos\alpha}{\lambda}$

$$I = I_{max}\cos^2\left(\frac{\pi L\cos\alpha}{\lambda}\right)$$

Konstruktiv interferens for $\Delta s = 0$, dvs for $\alpha = 90^\circ$

$$I_{max} = I_0 \cdot 10^{\beta_1/10} \qquad I_{min} = I_0 \cdot 10^{\beta_2/10}$$

$$I_{min} = I_{max} \cdot 10^{\frac{\beta_2-\beta_1}{10}} = I_{max} \cdot 10^{-0{,}6} = 0{,}251 \cdot I_{max}$$

$$\left[\cos^2\left(\frac{\pi L\cos\alpha}{\lambda}\right)\right]_{max} - \left[\cos^2\left(\frac{\pi L\cos\alpha}{\lambda}\right)\right]_{min} = 1 - 0{,}251$$

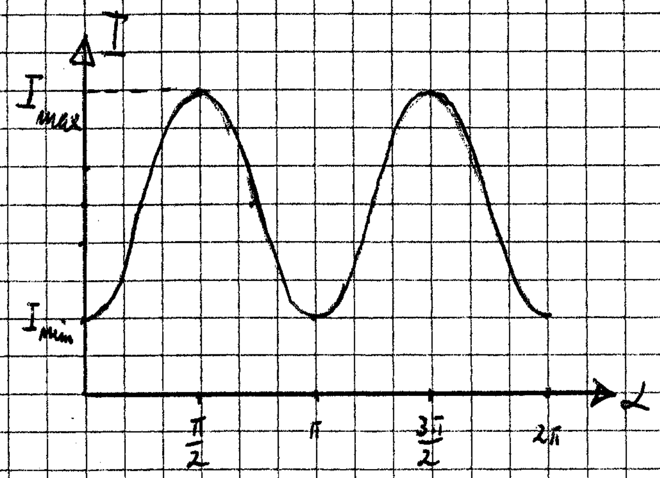
$$\frac{dI}{d\alpha} = 2 \cdot I_{max} \cdot \cos\left(\frac{\pi L\cos\alpha}{\lambda}\right) \cdot \left(-\sin\left(\frac{\pi L\cos\alpha}{\lambda}\right)\right)\frac{\pi L}{\lambda}(-\sin\alpha) = 0$$

Nå er generelt $2\sin\varphi\cos\varphi = \sin 2\varphi$

$$\Rightarrow \sin\left(\frac{2\pi L\cos\alpha}{\lambda}\right)\sin\alpha = 0$$

$\alpha = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$ gir maksimum.

$\alpha = 0, \pi$ gir minimum.

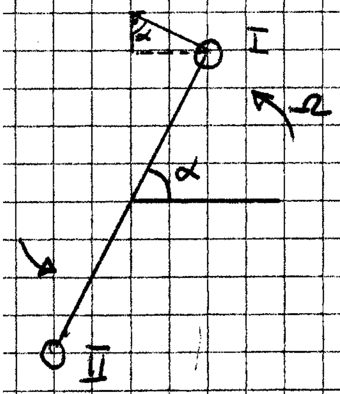


d) Når armen roterer, vil de to kildene flytte seg med ulik hastighet i forhold til observatør og medium (luft)

$\Rightarrow$ Ulik Dopplereffekt $\Rightarrow$ Svevning

$$f_{obs} = \frac{v + v_{obs}}{v + v_{send}} \cdot f_{send}$$

med fortegn og betingelser som angitt under a)



Med rotasjonsretning som angitt blir

$$v_I = \frac{L}{2}\,\Omega \sin\alpha = \frac{L}{2}\cdot\Omega \sin(\Omega t)$$

$$v_{II} = -\frac{L}{2}\,\Omega \sin(\Omega t) = -v_I$$

i forhold til observatøren.

$\sin\alpha = \sin(\Omega t + \psi)$ der ψ er en vilkårlig fasevinkel. Vi setter $\psi = 0$

Svevefrekvensen er $\frac{1}{2}|f_{II} - f_I|$, men <u>observert</u> svevefrekvens er $|f_{II} - f_I| = f_B$

$$f_B = |f_{II} - f_I| = f_S \left| \frac{v}{v + v_{II}} - \frac{v}{v + v_I} \right|$$

$$= f_S \left| \frac{v}{v - v_I} - \frac{v}{v + v_I} \right| = f_S\, v \left| \frac{2 v_I}{v^2 - v_I^2} \right|$$

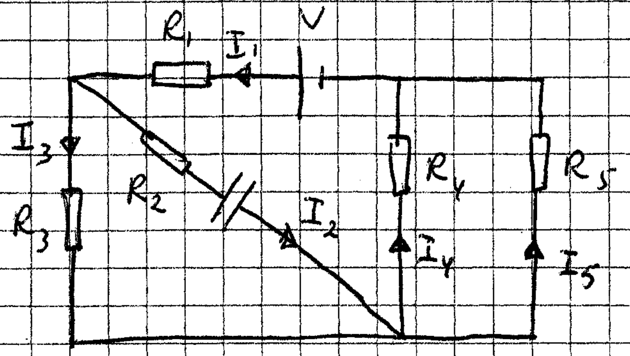
$$= f_S\, v \left| \frac{L\Omega \sin(\Omega t)}{v^2 - \frac{L^2 \Omega^2 \sin^2(\Omega t)}{4}} \right|$$

$$= f_S \frac{L\Omega}{v} \left| \frac{\sin(\Omega t)}{1 - \left(\frac{L\Omega}{2v}\right)^2 \sin^2(\Omega t)} \right|$$

Med $\frac{L\Omega}{2v} << 1$ blir

$$\underline{f_B \approx f_S \frac{L\Omega}{v} |\sin(\Omega t)|}$$

Oppgave 3



a) Når kondensatoren er fullt oppladet, er $I_2 = 0$.

Parallellkoblingen av R_4 og R_5 har ekvivalentmotstand $R' = \dfrac{R_4 \cdot R_5}{R_4 + R_5} = \dfrac{40 \cdot 50}{40 + 50}\,\Omega = \underline{22{,}2\,\Omega}$

$$I_1 = I_3 = \frac{V}{R' + R_1 + R_3} = \frac{12{,}0}{22{,}2 + 10{,}0 + 30{,}0}\,A = \underline{0{,}19\,A}$$

$$I_4 = I_3 \cdot R'/R_4 = 0{,}19 \cdot 22{,}2/40{,}0\ A = \underline{0{,}11\,A}$$

$$I_5 = 0{,}19\,A - 0{,}11\,A = \underline{0{,}08\,A}$$

Retninger som vist i figuren.

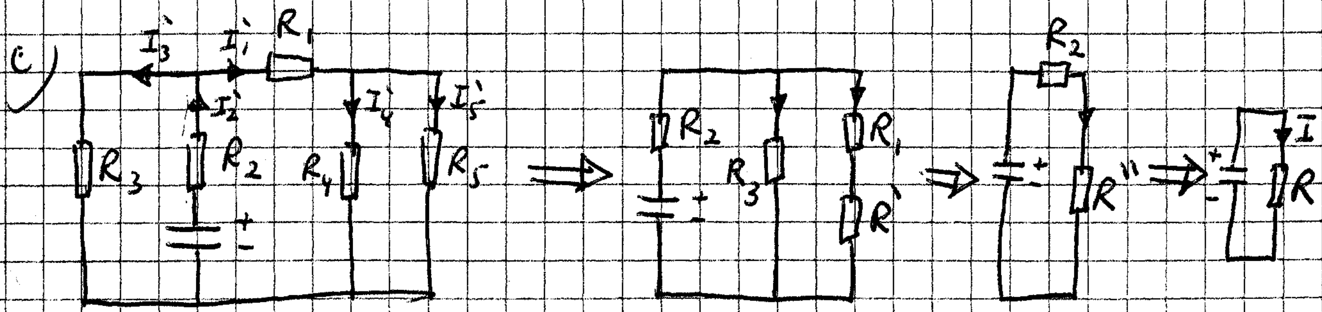
b) Spenningen over kondensatoren er

$$V_3 = I_3 \cdot R_3 = 0{,}19 \cdot 30\ V = \underline{5{,}7\,V}$$

Kondensatorladningen

$$Q = C \cdot V_3 = 4{,}0 \cdot 10^{-6} \cdot 5{,}7\ C = \underline{22{,}8\,\mu C}$$

c)



$$\frac{1}{R_3} + \frac{1}{R_1 + R'} = \frac{1}{R''} \Rightarrow R'' = \frac{R_3(R_1 + R')}{R_3 + R_1 + R'} = \frac{30(10 + 22{,}2)}{30 + 10 + 22{,}2}\,\Omega$$

$$R'' = \underline{15{,}5\,\Omega} \qquad R = R_2 + R'' = (20 + 15{,}5)\,\Omega = \underline{35{,}5\,\Omega}$$

Oppgave 3 forts

$$\frac{q}{C} - IR = 0 \qquad I = -\frac{dq}{dt}$$

$$\frac{q}{C} + \frac{dq}{dt} \cdot R = 0$$

$$\frac{dq}{q} = -\frac{dt}{RC} \Rightarrow \ln q = \frac{-t}{RC} + K'$$

$$q = K e^{-t/RC} \qquad t=0: \; q = Q \Rightarrow K = Q$$

$$q = Q e^{-t/RC}$$

$$I = -\frac{dq}{dt} = \frac{Q}{RC} e^{-t/RC} = \frac{22{,}8 \cdot 10^{-6}}{35{,}5 \cdot 4{,}0 \cdot 10^{-6}} e^{-\frac{t \cdot 10^6}{35{,}5 \cdot 4{,}0}} A$$

$$\underline{I = 0{,}16\,A \cdot e^{-\frac{t \cdot 10^6}{142}}} \qquad \text{tiden } t \text{ i sek}$$

eller

$$\underline{I = \frac{V_3}{R} \cdot e^{-t/RC}}$$ der V_3 er kondensatorspenningen før utladningen.

Strømretning som vist i figur.

$$I_2' = I = \underline{0.16A \cdot e^{-\frac{t \cdot 10^6}{142}}}$$

$$I_3' = I \cdot \frac{R''}{R_3} = 0.16 \cdot \frac{15.5}{30} A e^{-t/RC} = \underline{0{,}08 A e^{-\frac{t \cdot 10^6}{142}}}$$

$$I_1' = I - I_3' = \underline{0{,}08\,A \cdot e^{-\frac{t \cdot 10^6}{142}}}$$

$$I_4' = I_1' \frac{R'}{R_4} = 0.08 \cdot \frac{22.2}{40} e^{-t/RC} = \underline{0.04 A \cdot e^{-\frac{t \cdot 10^6}{142}}}$$

$$I_5' = I_1' - I_4' = \underline{0.04 A \cdot e^{-\frac{t \cdot 10^6}{142}}}$$

Strømretninger som i figur.

Oppgave 4.

a) L1: $R_1 = 22\,\text{cm}$ $R_2 = -22\,\text{cm}$

$$\frac{1}{f_1} = \frac{n-1}{1}\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) = \frac{1{,}50-1}{1}\left(\frac{1}{22} + \frac{1}{22}\right)$$

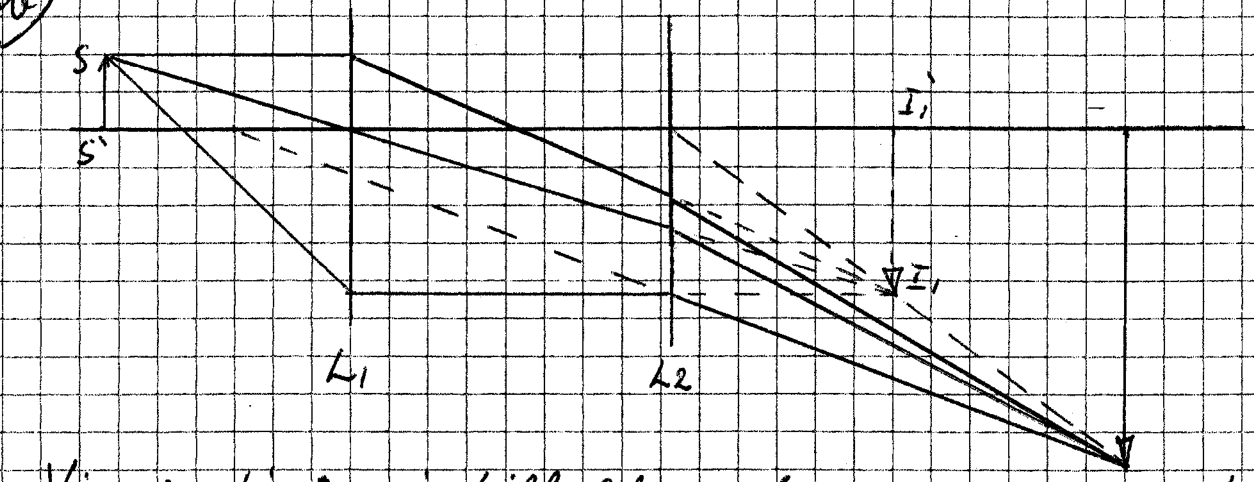
$\underline{\underline{f_1 = 22\,\text{cm}}}$ samlelinse

L2: $R_1 = -57\,\text{cm}$ $R_2 = 57\,\text{cm}$

$$\frac{1}{f_2} = \frac{1{,}50-1}{1}\left(-\frac{1}{57} - \frac{1}{57}\right)$$

$\underline{\underline{f_2 = -57\,\text{cm}}}$ spredelinse

b)



Vi ser først på billeddannelsen med linse L1 som om linse L2 ikke er der. Det gir et bilde I_1I_1' i posisjon i_1

$$\frac{1}{i_1} = \frac{1}{f_1} - \frac{1}{s_1} = \frac{1}{22} - \frac{1}{32} \Longrightarrow i_1 = 70\,\text{cm}$$

Dette bildet dannes ikke reelt, fordi linse L2 er der. Kilden S_2S_2' for avbildning med L2 er bildet I_1I_1' som er i avstand $70\,\text{cm} - 41\,\text{cm} = 29\,\text{cm}$ til høyre for L2. Derfor er s_2 negativ. $s_2 = -29\,\text{cm}$

(11)

$$\frac{1}{i_2'} = \frac{1}{f_2} - \frac{1}{s_2} = \frac{1}{-57} - \frac{1}{-29} = \frac{1}{59}$$

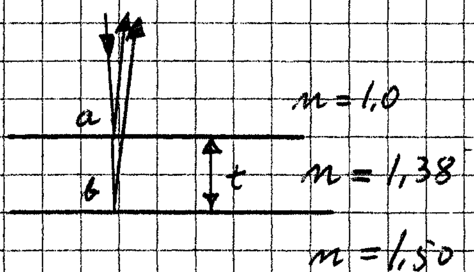
$\underline{i_2' = 59\,cm}$

Det endelige bildet er reelt, omvendt og 59 cm til høyre for linse L2.

Forstørrelse $M = M_1 \cdot M_2 = -\frac{i_1}{s_1}\left(-\frac{i_2}{s_2}\right)$

$$= -\frac{70}{32}\left(-\frac{59}{-29}\right) = \underline{-4{,}5}$$

c)



Tykkelsen av antirefleks-belegget er t

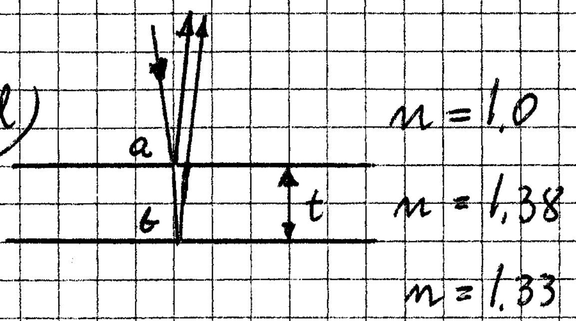
Refleksen minimaliseres hvis refleksene fra a og fra b interfererer destruktivt. Det vil være faseskifte π både ved a og ved b, derfor krever destruktiv interferens at $t = \lambda_n/4$ slik at veilengdeforskjellen blir $2 \cdot \lambda_n/4 = \lambda_n/2$.

$2t = (m + \frac{1}{2})\lambda_n = (m + \frac{1}{2})\frac{\lambda}{n}$ der λ_n er bølgelengden i belegget når λ er bølgelengden i luft

Det er best å ha belegget så tynt som mulig, derfor anvender vi $m = 0$

$$t = \frac{\lambda}{4n} = \frac{550\,nm}{4 \cdot 1{,}38} = 99{,}6\,nm \approx \underline{100\,nm}$$

d)



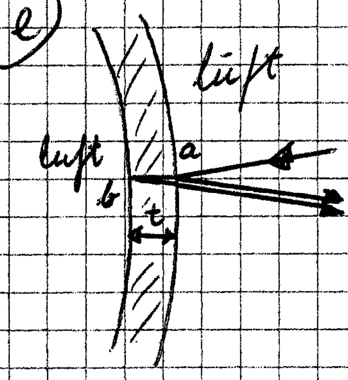
Nå får vi faseskifte π ved a, men ikke ved b.
Destruktiv interferens krever nå

$2t = m \cdot \lambda_n$ Tynneste mulighet gir $m=1$

$$t = \frac{\lambda_n}{2} = \frac{\lambda}{2n} = \frac{430}{2 \cdot 1{,}38}\,\text{nm} = \underline{156\,\text{nm}} \approx \underline{160\,\text{nm}}$$

(t svært tynn, bare noen få nm, gir også nær destruktiv interferens, men da for alle bølgelengder).

e)



Det reflekterte lyset får faseskifte π ved a, mens refleksjonen ved b ikke gir faseskifte.

Faseendringen pga ekstra veilengde for stråle som reflekteres ved b er φ_t

$$\varphi_t = 2\pi \cdot \frac{2t}{\lambda_n} = \frac{4\pi t n}{\lambda}$$

Total faseforskjell mellom de to reflekterte strålene er $\varphi = \pi + \varphi_t$. Det er konstruktiv interferens for $\varphi = 2\pi m$ der $m = 1, 2, \ldots$

$$\Rightarrow 2\pi m = \pi + \frac{4\pi t n}{\lambda}$$

$$\lambda = \frac{4nt}{2m-1} = \frac{4 \cdot 1{,}3 \cdot 400}{2m-1}\ \mathrm{nm}$$

$$\underline{\lambda = 2080\ \mathrm{nm},\ 693\ \mathrm{nm},\ 416\ \mathrm{nm},\ 297\ \mathrm{nm} \cdots}$$

Av disse er bare 693 nm og 416 nm i området for synlig lys.