Oppgave 1

a) $m \frac{d^2x}{dt^2} = -kx$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$x(t) = A_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{dx}{dt} = \omega A_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A_0 \sin(\omega t + \varphi)$$

Innsatt i ligningen:

$$-\omega^2 A_0 \sin(\omega t + \varphi) + \frac{k}{m} A_0 \sin(\omega t + \varphi) = 0$$

Vi ser at $x(t) = A_0 \sin(\omega t + \varphi)$ er en løsning hvis $\omega^2 = \frac{k}{m}$.

$t = 0: \; x = A_0 = A_0 \sin\varphi \Rightarrow \varphi = \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{90^\circ}}$

Amplituden er $A_0 = 10\,\text{cm} = \underline{\underline{0.10\,\text{m}}}$

$$f = \frac{\omega}{2\pi} = \sqrt{\frac{k}{m}} \cdot \frac{1}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{50}{0.5}}\,\text{Hz} = \underline{\underline{1.6\,\text{Hz}}}$$

$$T = \frac{1}{f} = \frac{1}{1.6}\,\text{s} = \underline{\underline{0.63\,\text{s}}}$$

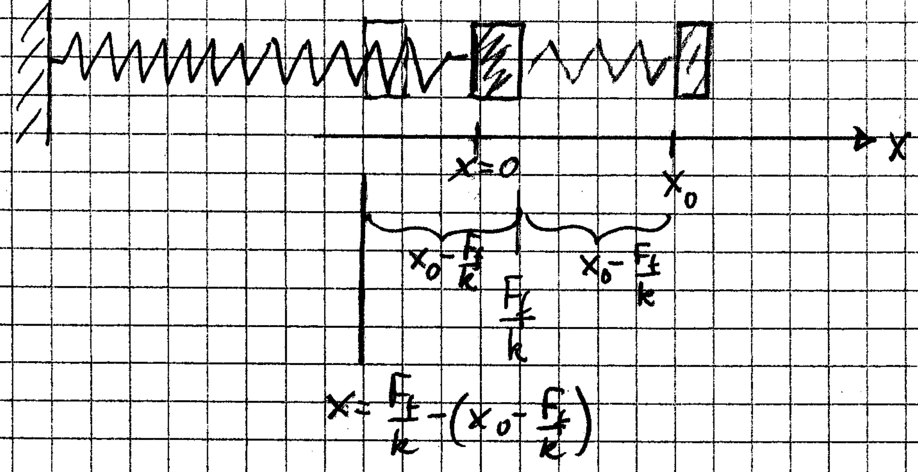
b) $v = \frac{dx}{dt} = \omega A_0 \cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow v_{max} = \omega A_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} A_0$

$$v_{max} = \sqrt{\frac{50}{0.5}} \cdot 0.1\,\text{m/s} = \underline{\underline{1\,\text{m/s}}}$$

$a = \frac{d^2x}{dt^2} = -\omega^2 A_0 \sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow a_{max} = \omega^2 A_0 = \frac{k}{m} A_0$

$$a_{max} = \frac{50}{0.5} \cdot 0.1\,\text{m/s}^2 = \underline{\underline{10\,\text{m/s}^2}}$$

c)



I figuren er forsøkt skissert situasjonen i første halvperiode. Da er

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx + F_f$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}\left(x - \frac{F_f}{k}\right) = 0$$

Den nye likevektsposisjonen, der ingen nettokraft virker på klossen, er ved $x = \frac{F_f}{k}$ i første halvperiode. Hvis vi trekker klossen til $x = x_0$ og slipper, vil altså F_{netto} være null ved $x = \frac{F_f}{k}$.

Massen starter i avstanden $x_0 - \frac{F_f}{k}$ fra "likevekt", og vil stoppe første gang ved $x = \frac{F_f}{k} - \left(x_0 - \frac{F_f}{k}\right)$ dvs ved $x = -\left(x_0 - \frac{2F_f}{k}\right)$.

Når bevegelsen snur, vil også F_f skifte retning. Ligningen blir da

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -kx - F_f$$

og F_{netto} vil i påfølgende halvperiode være null ved $x = -\frac{F_f}{k}$

c) forts ③

Hver halvperiode vil amplituden minke med $\frac{2F_f}{k}$. Bevegelsen vil stanse fullstendig når F_f er stor nok til å holde klossen i ro.

Første stopp vil være ved

$$x_1 = -\left(x_0 - \frac{2F_f}{k}\right) = -\left(+0{,}1\,\text{m} - \frac{2\cdot 0{,}25\,\text{m}}{50}\right) = -0{,}09\,\text{m} = \underline{-9\,\text{cm}}$$

Alternativ metode: Energibetraktning:

Energien lagret i fjæren ved vendepunktet x_1 er lik den opprinnelige energien minus friksjonsarbeidet (vi antar at x_1 er negativ):

$$\frac{1}{2}kx_1^2 = \frac{1}{2}kx_0^2 - F_f(x_0 - x_1)$$

$$\frac{1}{2}kx_1^2 - F_f x_1 + F_f x_0 - \frac{1}{2}kx_0^2 = 0$$

$$x_1 = \frac{F_f \pm \left(F_f^2 - 4\cdot\frac{1}{2}k\left(F_f x_0 - \frac{1}{2}kx_0^2\right)\right)^{1/2}}{k}$$

$$= \frac{1}{50}\left(0{,}25 \pm \left(0{,}25^2 - 2\cdot 50\left(0{,}25\cdot 0{,}1 - \frac{1}{2}\cdot 50\cdot 0{,}1^2\right)\right)^{1/2}\right)\text{m}$$

Vi velger negativ løsning $\qquad x_1 = \underline{-0{,}09\,\text{m}}$

d)

Ettersom amplituden minker med 1 cm for hver halvperiode, vil svingningene stoppe etter 5 perioder (ca).

Oppgave 2

a) I kule A vil ladningen fordele seg jevnt på overflaten, mens i kule B vil ladningen fordele seg i volumet. Det er imidlertid ikke uten videre åpenbart at ladningen i B vil fordele seg helt jevnt, men vi vil vente at symmetrien i ladningsfordelingen bedrer seg med tiden. Grunnen til at ladningen i A fordeler seg på overflaten, er at vi ikke kan ha et elektrisk felt i lederen. Hvis vi har det, vil nemlig ladningene øyeblikkelig bevege seg i feltet og nøytralisere det. Gauss' lov viser at det da ikke kan være ladning inne i kulen. Hvis ladningen ikke skulle være jevnt fordelt på overflaten, vil det oppstå et felt langs overflaten som beveger ladningene inntil feltet er nøytralisert. Derfor vil ladningene i A fordele seg kulesymmetrisk jevnt på overflaten.

b) Kule A:

$r < R$: $E = 0$

$r > R$: $\oint \vec{E} d\vec{A} = \frac{Q}{\varepsilon_0} = E \cdot 4\pi r^2 \Rightarrow E(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$

$$\vec{E}(\vec{r}) = \frac{Q\hat{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}$$

Kule B: Vi forutsetter kulesymmetrisk jevn fordeling av Q:

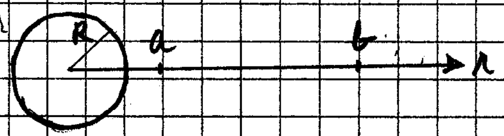
$r > R$: Som for kule A.

b) forts

$r<R$: $\oint \bar{E}\,d\bar{A} = \frac{Q}{\varepsilon} = \frac{Q\cdot r^3}{\varepsilon R^3} = E\cdot 4\pi r^2$

$$\left(E\cdot 4\pi r^2 = \int_0^r \frac{\rho\cdot 4\pi r^2 dr}{\varepsilon} = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi R^3}\cdot\frac{4\pi r^3}{3} = \frac{Q r^3}{\varepsilon R^3} \right)$$

$$\Rightarrow E(r) = \underline{\frac{Q r}{4\pi\varepsilon R^3}} \qquad \bar{E}(\bar{r}) = \underline{\frac{Q\bar{r}}{4\pi\varepsilon R^3}}$$

c) 

Kule A: $dV = -\bar{E}\,d\bar{s}$

$r>R$: $V_a - V_b = \int_a^b \bar{E}\,d\bar{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_a^b \frac{dr}{r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{r_a} - \frac{1}{r_b}\right)$

Vi legger referansen V_b i $\cancel{b} = \infty$, dvs $V(\infty) = 0$

$$\Rightarrow V(r) = \underline{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r}}$$

$r<R$:

$$V(r) = -\int_\infty^R \bar{E}\,d\bar{r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R} = V(R)$$

Kule B:

$r>R$ som for kule A

$r<R$: $V(r) = V(R) - \int_R^r \bar{E}\,d\bar{r}$

$$V(r) = \int_r^R \frac{Q r\,dr}{4\pi\varepsilon R^3} + V(R) = \frac{Q}{2\cdot 4\pi\varepsilon R^3}(R^2 - r^2) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}$$

$$V(r) = \underline{\frac{Q}{8\pi\varepsilon R^3}(R^2 - r^2) + \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}}$$

Med $\varepsilon = \varepsilon_0$:

$$V(r) = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\frac{1}{2} - \frac{r^2}{2R^2} + 1\right) = \underline{\frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R}\left(3 - \frac{r^2}{R^2}\right)}$$

d) Vi summerer feltene vektorielt, og gir feltbidragene indekser 1 og 2 avhengig av om de kommer fra kule 1 eller 2

Pkt (0,0)

$E_1 = 0 \quad (r = 0)$

$$E_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (2R)^2}$$

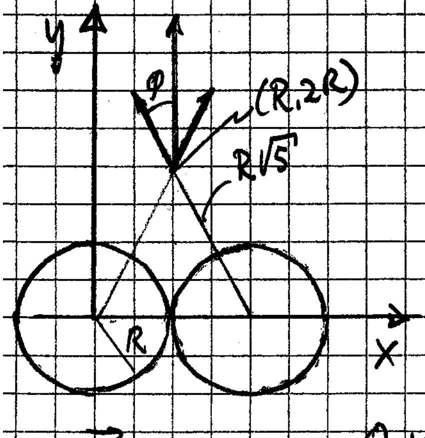
$$E(0,0) = E_1 + E_2 = \underline{\frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 R^2}}$$

$$\vec{E}(0,0) = \underline{-\frac{Q}{16\pi\varepsilon_0 R^2}\,\vec{i}}$$ der $\vec{i}$ er enhetsvektor i positiv x-retning.

Pkt (R,0): $\vec{E}_1 = -\vec{E}_2 \Rightarrow \vec{E}(R,0) = \underline{0}$

Pkt (R,2R): Også her opphever x-komponentene hverandre, mens y-komponentene adderes.

$r = \sqrt{R^2 + (2R)^2} = R\cdot\sqrt{5}$



$$E_{1y} = E_{2y} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cdot\cos\varphi$$

$$= \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (R\sqrt{5})^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{Q}{10\sqrt{5}\,\pi\varepsilon_0 R^2}$$

$$E = E_{1y} + E_{2y} = \underline{\frac{Q\sqrt{5}}{25\pi\varepsilon_0 R^2}}$$

$$\vec{E}(R,2R) = \frac{Q\sqrt{5}}{25\pi\varepsilon_0 R^2}\,\vec{j}$$ der $\vec{j}$ er enhetsvektor i positiv y-retning.

d) forts

Vi summerer potensialene som skalarer, og antar $\varepsilon = \varepsilon_0$

Pkt (0,0): $V_1 = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 R}(3-0)$

$$V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (2R)}$$

$$V = V_1 + V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R}\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}\right) = \underline{\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R}}$$

Pkt (R,0): $V = V_1 + V_2 = 2V_1 = 2V(R) = \underline{\frac{Q}{2\pi\varepsilon_0 R}}$

Pkt (R,2R):

$$V_1 = V_2 = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R\sqrt{5}}$$

$$V = V_1 + V_2 = \underline{\frac{Q\sqrt{5}}{10\pi\varepsilon_0 R}}$$

Oppgave 3

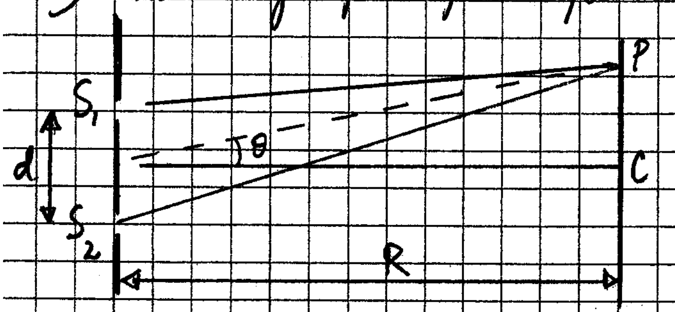
a) For konstruktiv interferens: $\Delta l = d\sin\theta = n\cdot\lambda$

$y = R\tan\theta \approx R\sin\theta = R\frac{n\lambda}{d}$ for små vinkler

$\Delta y = R\cdot\frac{\Delta n\lambda}{d}$ $\qquad \Delta n = 1$

$$\lambda = \frac{d\,\Delta y}{R\,\Delta n} = \frac{d\,\Delta y}{R} = \frac{10^{-3}\cdot 10^{-3}}{2}\,m = 500\cdot 10^{-9}\,m = \underline{500\,nm}$$

b) Veilengdeforskjell for de to stråler mot et punkt på P:



$\Delta l = -\frac{\lambda}{2} + d\sin\theta$

Maksima: $-\frac{\lambda}{2} + d\sin\theta = n\lambda$

$d\sin\theta = (n+\frac{1}{2})\lambda \quad n = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$

$y_{max} = R\tan\theta \approx R\sin\theta$ for små vinkler

$\Rightarrow$ $\underline{y_{max} = \frac{R\lambda}{d}(n+\frac{1}{2})}$ for $n = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

Hvis $\lambda = 500\,nm$, blir $\frac{R\cdot\lambda}{d} = \frac{2\cdot 500\cdot 10^{-9}}{10^{-3}}\,m = 10^{-3}\,m$

dvs maksima med 1mm mellomrom

Minima: $-\frac{\lambda}{2} + d\sin\theta = (n-\frac{1}{2})\lambda \Rightarrow d\sin\theta = n\lambda$

$\underline{y_{min} = \frac{R\lambda}{d}\cdot n}$ for $n = 0, \pm 1, \pm 2 \cdots$

dvs minima mellom maksima.

$\theta = 0$, dvs pkt C, har $n = 0$ og har et $\underline{\text{minimum}}$

c) Bølgelengden for lyset i luft er λ_0. Bølgelengden i den gjennomsiktige gjenstanden er $\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$. Avstanden fra C er den samme for de to spaltene, men lyset fra S_2 har gått distansen $\frac{\lambda_0}{2}$ kortere enn lyset som kommer fra S_1

Faseforskjellen er derfor gitt ved forskjellen i antall bølgelengder i distansen w med og uten den gjennomsiktige gjenstanden, samt av forskjellen $\lambda_0/2$ i veilengden før spaltene. Optisk veilengde i et medium med brytningsindeks n er $n \cdot w$ der w er virkelig veilengde.

$$\Delta s = s_2 - s_1 = w \cdot n - w \cdot 1 - \lambda_0/2$$

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda_0}\left(w(n-1) - \lambda_0/2\right) = \pi\left(\frac{2w(n-1)}{\lambda_0} - 1\right)$$

Feltet i C er gitt ved summen av bidragene fra de to strålene:

$$E_c = E_0\left(\sin\omega t + \sin(\omega t + \Delta\varphi)\right)$$

$$= E_0 \cdot 2\sin\left(\frac{\omega t + \omega t + \Delta\varphi}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega t - (\omega t + \Delta\varphi)}{2}\right)$$

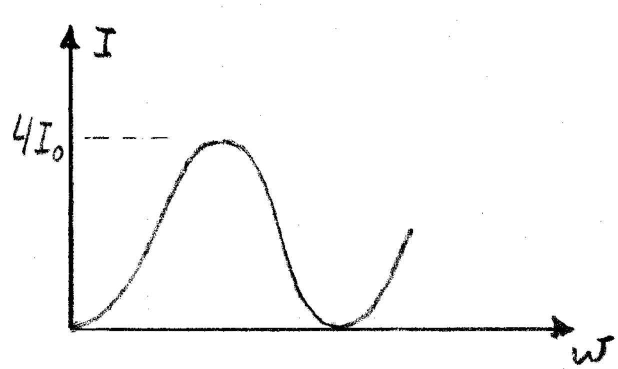
$$= 2E_0 \cos\frac{\Delta\varphi}{2}\sin\left(\omega t + \frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

$$I \propto 4E_0^2\cos^2\frac{\Delta\varphi}{2}\sin^2\left(\omega t + \frac{\Delta\varphi}{2}\right)$$

Tidsmiddelverdien av $\sin^2\left(\omega t + \frac{\Delta\varphi}{2}\right)$ er lik $\frac{1}{2}$

Setter vi $I_0 = E_0^2 \cdot \frac{1}{2}$ får vi

$$I \propto 4I_0\cos^2\frac{\Delta\varphi}{2} = \underline{4I_0\cos^2\left[\pi\left(\frac{w(n-1)}{\lambda_0} - \frac{1}{2}\right)\right]}$$



1. maximum ved

$$\frac{w(n-1)}{\lambda_0} - \frac{1}{2} = 0$$

dvs ved $w = \frac{\lambda_0}{2(n-1)}$

10

d) Maksima for λ_1: $d\sin\theta = n\lambda_1 \approx d\tan\theta = d\cdot\frac{y_{max}}{R}$

$$y_{max} = \frac{R n \lambda_1}{d} \quad n = 0, \pm1, \pm2 \ldots$$

Det tjuende maksimum utenfor midtpunktet av skjermen for $n = 20$

Minima for λ_2:

$$y_{min} = \frac{R\lambda_2(n+\frac{1}{2})}{d} \quad n = 0, \pm1, \pm2 \ldots$$

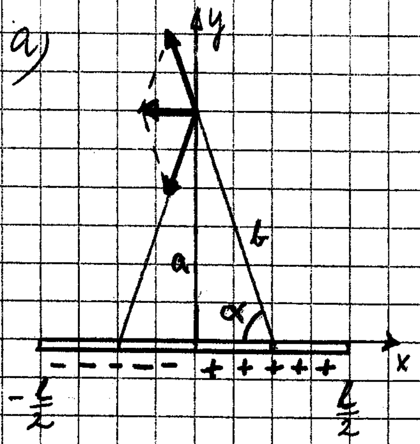
Det nittende minimum utenfor midtpunktet av skjermen for $n = 18$ (det første for $n = 0$):

$$\frac{R\cdot\lambda_1\cdot 20}{d} = \frac{R\cdot\lambda_2\cdot 18.5}{d} \Rightarrow \lambda_2 = \frac{20}{18.5}\lambda_1 = 1.081\lambda_1$$

$$\frac{\lambda_2-\lambda_1}{\lambda_1} = \frac{1.081-1}{1} = \underline{\underline{0.081}}$$

Oppgave 4

a)



$b^2 = a^2 + x^2 \qquad \cos\alpha = \frac{x}{b}$

Vi ser at feltbidragene i y-retning fra + og − sidene opphever hverandre, mens bidragene i x-retning adderes.

$$dE = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{dq}{b^2} \cdot \cos\alpha$$

$$dE = 2 \cdot \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda \cdot dx}{(a^2+x^2)} \frac{x}{(a^2+x^2)^{1/2}}$$

$$E = \int_0^{L/2} \frac{2}{4\pi\varepsilon_0} \frac{\lambda\, x\, dx}{(a^2+x^2)^{3/2}} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{(a^2+x^2)^{1/2}}\right]_0^{L/2}$$

$$\underline{E = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{(a^2+(\frac{L}{2})^2)^{1/2}}\right]} \qquad \underline{\vec{E} = \frac{-\lambda\vec{i}}{2\pi\varepsilon_0}\left[\frac{1}{a} - \frac{1}{(a^2+(\frac{L}{2})^2)^{1/2}}\right]}$$

$$E = \frac{4{,}0 \cdot 10^{-8}}{2 \cdot \pi \cdot 8{,}85 \cdot 10^{-12}}\left(\frac{1}{0{,}40} - \frac{1}{(0{,}4^2+0{,}15^2)^{1/2}}\right) \mathrm{V/m} = \underline{114\ \mathrm{V/m}}$$

$\vec{E}$ har retning langs negativ x-akse. $\vec{E} = \underline{-114\,\vec{i}\,\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}}}$

$V = -\int \vec{E}\,d\vec{s}$ Langs midtlinjen er $\vec{E} \perp \vec{s} \Rightarrow \underline{V = 0}$

b) Middelpktet for de to ladningsfordelingene ligger midt på hver halvdel. Avstanden mellom disse blir $L/2$

$$p = \lambda \cdot \frac{L}{2} \cdot \frac{L}{2} = \lambda \frac{L^2}{4} = 4{,}0 \cdot 10^{-8} \cdot \frac{0{,}30^2}{4}\ \mathrm{Cm} = \underline{9 \cdot 10^{-10}\ \mathrm{Cm}}$$

$\vec{p}$ har retning langs positiv x-akse. $\vec{p} = \underline{9 \cdot 10^{-10}\,\vec{i}\ \mathrm{Cm}}$

c) $\vec{\tau} = \vec{p} \times \vec{E}_0$ (12)

$\vec{\tau} = pE_0 \sin\alpha = 9 \cdot 10^{-10} \cdot 2{,}4 \cdot 10^{4} \cdot \sin 20^\circ \text{ Nm} = \underline{7{,}4 \cdot 10^{-6} \text{ Nm}}$

$U = -\vec{p}\,\vec{E}_0 = -pE_0 \cos\alpha$ hvis vi velger $U = 0$ ved $\alpha = \frac{\pi}{2}$

$U = -9{,}0 \cdot 10^{-10} \cdot 2{,}4 \cdot 10^{4} \cos 20^\circ \text{ J} \qquad = \underline{-2{,}0 \cdot 10^{-5} \text{ J}}$

d) $I = \frac{dq}{dt} \qquad I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$

der Δq er ladningen som passerer et tverrsnitt i tidsintervallet Δt. Hvis en ladning beveger seg i en sirkulær bane, passerer den et tverrsnitt av banen én gang pr omdreining, dvs pr tidsenhet vil den passere f ganger der f er rotasjonsfrekvensen $\Rightarrow I = fq$

e) $dI = f \cdot \lambda \cdot dR \cdot 2$ der R er avstand fra omdreiningssentrum

$I = \int_0^{L/2} 2f\lambda\, dR = 2f\lambda \frac{L}{2} = \frac{\omega}{2\pi} \lambda L$

$I = \frac{377}{2\pi} \cdot 9 \cdot 10^{-3} \cdot 0{,}3 \text{ A} \qquad = \underline{0{,}16 \text{ A}}$