Oppgave 1 (1)

a) Konstruktiv interferens for

$d \cdot \sin\theta = m\lambda \qquad m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots$

1. ordens hovedmaksimum for $m = \pm 1$

$\lambda_1 = 579.1 \text{ nm} \Rightarrow \theta_1 = \pm \arcsin\left(\frac{\lambda_1}{d}\right)$

$= \pm \arcsin\left(\frac{579.1 \cdot 10^{-9}}{3.000 \cdot 10^{-6}}\right) = \underline{\pm 11{,}13^\circ}$

$\lambda_2 = 577.0 \text{ nm} \qquad \theta_2 = \pm \arcsin\left(\frac{577.0 \cdot 10^{-9}}{3.000 \cdot 10^{-6}}\right) = \underline{\pm 11{,}09^\circ}$

b) $|\sin\theta_1| \leq 1 \Rightarrow \left|\frac{m\lambda_1}{d}\right| \leq 1$

$|m| \leq \frac{d}{\lambda_1} = \frac{3.000 \cdot 10^{-6}}{579.1 \cdot 10^{-9}} = 5{,}18$

$|m| \leq 5 \Rightarrow m = \{-5, -4, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5\}$

<u>Det er mulig å observere 11 hovedmaksima.</u>

c) Kromatisk oppløsningsevne $R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = N \cdot m$

$N = \frac{\lambda}{m\Delta\lambda} = \frac{579{,}1}{2{,}1} = 276$

<u>Gitteret må ha mer enn 276 spalter</u>

d) $I = I_0 \left(\frac{\sin^2(N\beta)}{\sin^2\beta}\right)\left(\frac{\sin^2\alpha}{\alpha^2}\right)$

der $\beta = \frac{\pi d \sin\theta}{\lambda}$ og $\alpha = \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda}$

Diffraksjonsleddet gir null intensitet for

$\alpha = \frac{\pi a \sin\theta}{\lambda} = n \cdot \pi \qquad n = \pm 1, \pm 2, \cdots$

dvs for $\sin\theta = \frac{n\lambda}{a}$

(2)

Oppgave 1 d forts

Hvis vi velger a slik at $\sin\theta = \frac{m\lambda}{d} = \frac{n\lambda}{a}$ for $m=3$ får vi null intensitet i 3. ordens hovedmaksimum for λ.

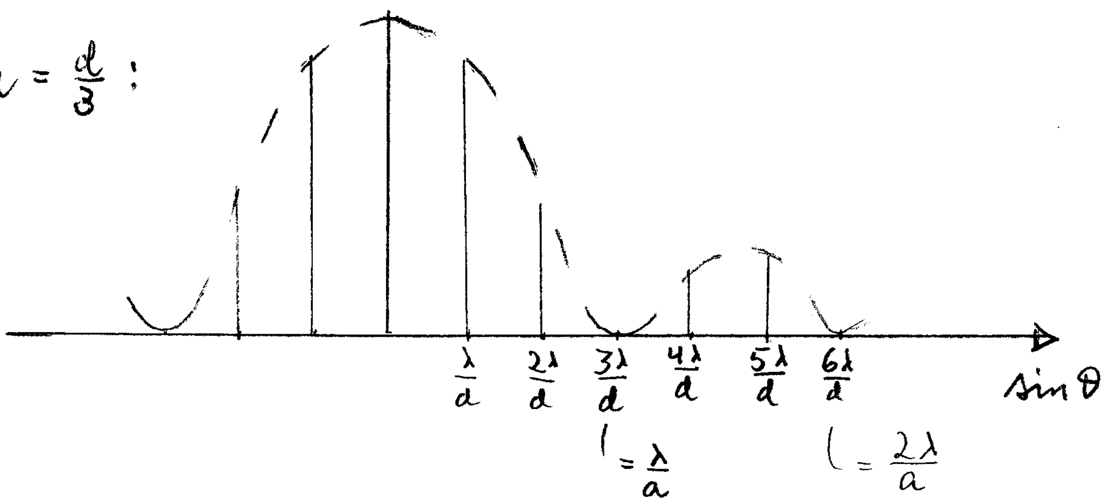
$\Rightarrow \frac{n}{a} = \frac{3}{d}$ eller $\underline{a = \frac{d}{3}\cdot n}$

$n=1$: $\underline{a = \frac{d}{3}} = 1\,\mu m$ $n=2$: $\underline{a = \frac{2d}{3}} = 2\,\mu m$

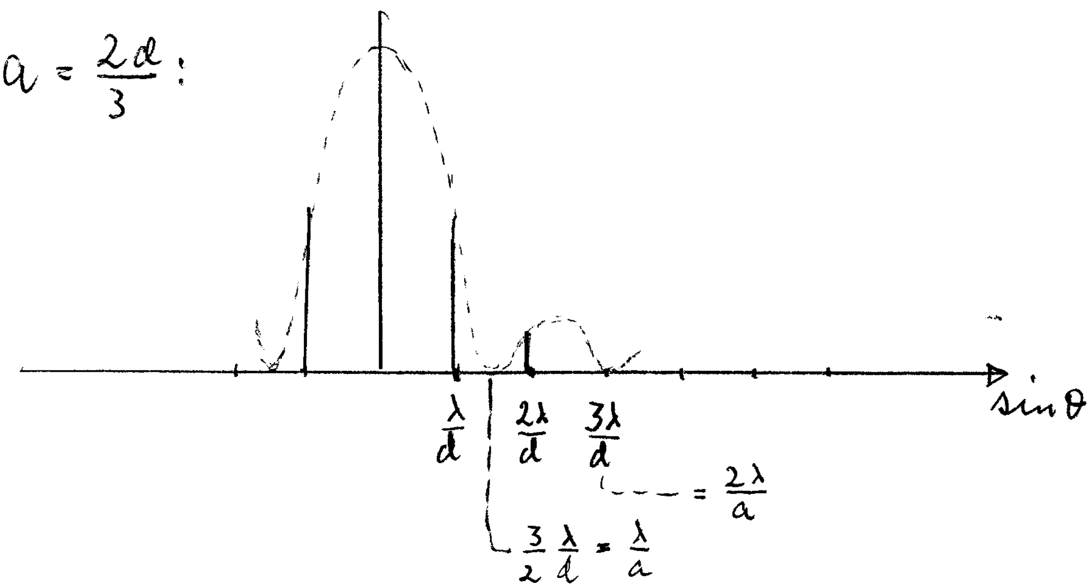
Åpenbart er $a < d$.

e)

$a = \frac{d}{3}$:

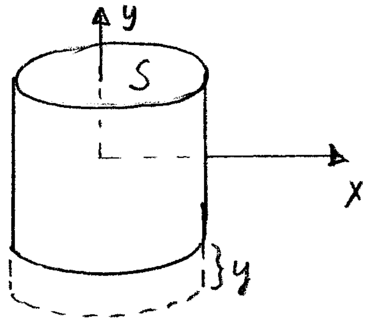


$a = \frac{2d}{3}$:



Oppgave 2.

a)



Kraft som virker på sylinderen fra vannet ved likevekt er lik vekten av den fortrengte væske-mengden (Arkimedes). Denne kraften balanseres av tyngde-kraften. Ved avvik y fra likevekt vil kraften som skyver sylinderen tilbake være gitt ved tyngden av det ekstra vannet som fortrenges.

$$F_s = -yS\cdot\rho_v\cdot g = -y\cdot K$$

Her er $m = -y\cdot S\cdot\rho_v$ = massen av det ekstra vannet som fortrenges. Vi ser at

$$K = S\cdot\rho_v\cdot g = 25\cdot 1\cdot 10^3\cdot 9.8\ \mathrm{kg/s^2} \qquad = \underline{2.45\cdot 10^5\ \mathrm{kg/s^2}}$$

b) Bevegelsesligningen

$$F_s = ma = m\cdot\frac{d^2y}{dt^2}$$ der $m = Sh\rho_s$ = massen av sylinderen.

$$\Rightarrow -Ky = m\frac{d^2y}{dt^2} \quad\Rightarrow\quad \underline{\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{K}{m}y = 0}$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{K}{m}} = \sqrt{\frac{S\rho_v g}{Sh\rho_s}} = \sqrt{\frac{\rho_v g}{h\rho_s}} = \sqrt{\frac{1\cdot 9.8}{3\cdot 0.5}}\ s^{-1} = \underline{2.56\ s^{-1}}$$

$$f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{2.56}{2\cdot\pi}\ \mathrm{Hz} \qquad = \underline{0.41\ \mathrm{Hz}}$$

$$T_0 = \frac{1}{f_0} = \frac{1}{0.41}\ s \qquad = \underline{2.46\ s}$$

Oppgave 2c)

$$y_h(x,t) = H\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}x - \omega t\right)$$

Ved $x=0$: $\quad y_h = H\cos(\omega t)$

Bølgen gjør derfor at sylinderen blir påtrykt en varierende kraft $F(t) = S\cdot\rho_v\cdot g\cdot y_h = Ky_h$

De andre kreftene som virker på sylinderen, er F_S og F_R.

$$\sum F = ma$$

$$F_S + F_R + F(t) = m\cdot a$$

$$-Ky - R\frac{dy}{dt} + Ky_h = m\cdot\frac{d^2y}{dt^2}$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{R}{m}\frac{dy}{dt} + \frac{K}{m}y = \frac{K}{m}y_h = \frac{K}{m}H\cos\omega t$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\gamma\frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = \omega_0^2 y_h = \omega_0^2 H\cos\omega t$$

$$\underline{\frac{d^2y}{dt^2} + 2\gamma\frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = B\cos\omega t} \qquad \text{q.e.d.}$$

$$\gamma = \frac{R}{2m} = \frac{R}{2Sh\rho_s} = \frac{3\cdot10^5}{2\cdot25\cdot3\cdot0{,}5\cdot10^3}\,s^{-1} = \underline{4s^{-1}}$$

$$B = \omega_0^2\cdot H = 2{,}56^2\cdot0{,}7\ m/s^2 = \underline{4{,}6\ m/s^2}$$

Oppgave 2d)

$$A = \frac{B}{\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega^2}}$$

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{9}\,s^{-1} = 0{,}70\,s^{-1}$$

$$A = \frac{4.6}{\sqrt{(0{,}70^2 - 2{,}56^2)^2 + 4\cdot 4^2 \cdot 0{,}70^2}}\ m \qquad = \underline{0{,}56\,m}$$

$$\tan\delta = \frac{2\gamma\omega}{\omega^2-\omega_0^2} = \frac{2\cdot 4\cdot 0{,}70}{0{,}70^2 - 2{,}56^2} = -0{,}92$$

$$\delta = \underline{-42.6^\circ}$$

e)

$$P(t) = \left|F_R \cdot \frac{dy}{dt}\right| = \left|R\frac{dy}{dt}\cdot\frac{dy}{dt}\right|$$

$$= R\,A\sin(\omega t+\delta)\cdot\omega\cdot A\sin(\omega t+\delta)\cdot\omega$$

$$= R A^2\omega^2\sin^2(\omega t+\delta)$$

Middelverdien av $\sin^2(\omega t+\delta)$ over tid er $\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \overline{P(t)} = \underline{\frac{1}{2}RA^2\omega^2}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 10^5\cdot 0.56^2\cdot 0{,}70^2\,W \qquad = \underline{23\,kW}$$

Oppgave 3

a) $\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_1 q_2}{x^2} = kx \quad \Rightarrow x^3 = \frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 k}$

$$x = \left(\frac{q_1 q_2}{4\pi\varepsilon_0 k}\right)^{1/3} = \left(\frac{5{,}6\cdot 10^{-8}\cdot 7{,}2\cdot 10^{-8}}{4\pi\cdot 8.85\cdot 10^{-12}\cdot 4{,}3\cdot 10^{-3}}\right)^{1/3} m = \underline{0{,}204\, m}$$

b) $C_0 = \varepsilon_0 \frac{A}{d} = \frac{\varepsilon_0 \cdot \pi R^2}{d}$

$$d = \frac{\pi R^2 \varepsilon_0}{C_0} = \frac{\pi\cdot 3^2\cdot 10^{-4}\cdot 8.85\cdot 10^{-12}}{12{,}5\cdot 10^{-12}} m = \underline{2\cdot 10^{-3} m}$$

c) Systemet blir nå som to kondensatorer i serie, hver med tykkelse $d/2$, men den ene har permittivitet ε_0, og den andre har permittivitet $\kappa\varepsilon_0 = \varepsilon$

$$C_0' = \varepsilon_0 \cdot \frac{A}{d/2} = 2C_0 = 2\cdot 12.5\,pF = 25{,}0\,pF$$

$$C_0'' = \kappa\varepsilon_0 \frac{A}{d/2} = 2\cdot\kappa C_0 = 2\cdot 2.5\cdot 12.5\,pF = 62.5\,pF$$

$$\frac{1}{C_1} = \frac{1}{C_0'} + \frac{1}{C_0''} \Rightarrow C_1 = \frac{C_0' C_0''}{C_0' + C_0''} = \frac{25\cdot 62.5}{25+62.5} pF = \underline{17{,}9\,pF}$$

d) $C_2 = \kappa\varepsilon_0 \frac{A}{d} = \kappa C_0 = 2.5\cdot 12.5\,pF = \underline{31{,}3\,pF}$

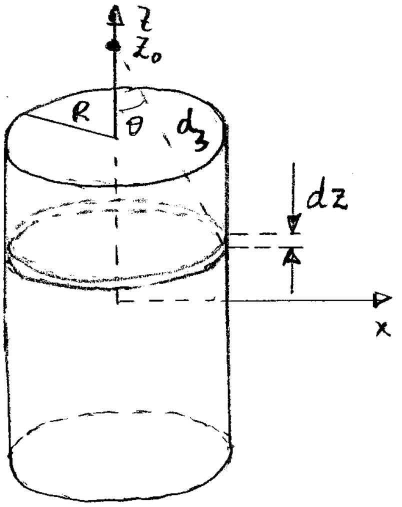
e) Systemet blir nå som to kondensatorer i parallell som hver har areal $A/2$

$$C_3 = \varepsilon_0 \frac{A}{2d} + \kappa\varepsilon_0\frac{A}{2d} = \frac{1}{2}C_0 + \frac{\kappa}{2}C_0 = 12.5\,pF\left(\frac{1}{2}+\frac{2.5}{2}\right) = \underline{21.9\,pF}$$

Oppgave 4 a)

Flateladningstettheten på sideflaten er

$$\sigma = \frac{Q}{2\pi R\cdot 2a} = \frac{Q}{4\pi R a}$$



Vi ser på bidraget fra en ring med radius R og bredde dz på sylindersideflaten. Avstanden fra ringen til z_0 er d_3, og avstanden fra ringens plan til z_0 er $z_0 - z$.

$$dE' = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 d_3^2}\cdot\cos\theta$$

fordi av symmetrigrunner vil bare z-komponenten gi bidrag.

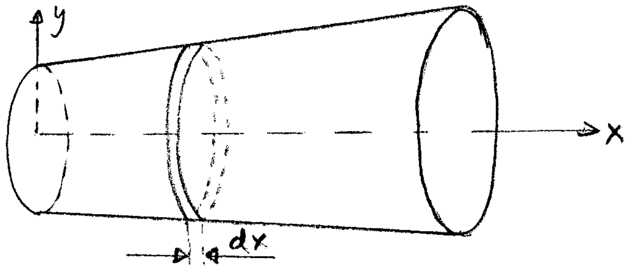
$$dE' = \frac{\sigma\cdot 2\pi R\cdot dz}{4\pi\varepsilon_0\left((z_0-z)^2+R^2\right)}\cdot\frac{z_0-z}{\left((z_0-z)^2+R^2\right)^{1/2}}$$

$$= \frac{Q\cdot 2\pi R\,dz\,(z_0-z)}{4\pi R a\cdot 4\pi\varepsilon_0\left((z_0-z)^2+R^2\right)^{3/2}} = \frac{Q\,(z_0-z)\,dz}{8\pi\varepsilon_0 a\left((z_0-z)^2+R^2\right)^{3/2}}$$

$$E' = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a}\int_{-a}^{a}\frac{(z_0-z)\,dz}{\left((z_0-z)^2+R^2\right)^{3/2}} = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a}\left[\left((z_0-z)^2+R^2\right)^{-1/2}\right]_{-a}^{a}$$

$$\underline{\vec{E}' = \frac{Q}{8\pi\varepsilon_0 a}\left[\frac{1}{\left((z_0-a)^2+R^2\right)^{1/2}} - \frac{1}{\left((z_0+a)^2+R^2\right)^{1/2}}\right]\vec{k}}$$

Oppgave 4 b)



Vi ser på en skive med tykkelse dx og radius $r = r_0 + \alpha x$ i avstanden x fra origo. Motstanden i skiven er $dR = \frac{\rho\, dx}{A}$

$$R = \int_0^L \frac{\rho\, dx}{\pi r^2} = \frac{\rho}{\pi}\int_0^L \frac{dx}{(r_0+\alpha x)^2} = \frac{\rho}{\pi\alpha}\left[\frac{-1}{r_0+\alpha x}\right]_0^L$$

$$= \frac{\rho}{\pi\alpha}\left(\frac{1}{r_0} - \frac{1}{r_0+\alpha L}\right) = \underline{\frac{\rho L}{\pi r_0 (r_0+\alpha L)}}$$