Oppgave 1 a) Udempede svingninger: $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi \cdot \frac{90}{60}\,s^{-1} = \underline{9{,}42\,s^{-1}}$

b) Dempede svingninger: $\omega = 2\pi f = 2\pi \cdot \frac{89}{60}\,s^{-1} = \underline{9{,}32\,s^{-1}}$

c)

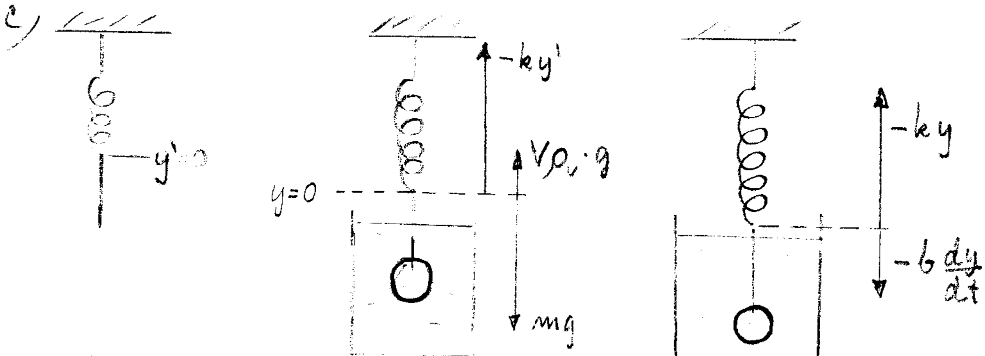


fig 1   fig 2   fig 3

Fig 1 viser nullpunktet $y'=0$ når fjæren er ubelastet

Fig 2 viser kreftene når fjæren er belastet med kule i væske. Kulevolumet er V, væsketettheten er ρ_v og oppdriften blir $V\rho_v g$. Verdien av y' definerer nå $y=0$ ved likevekt.

Fig 3: Så trekkes kulen ytterligere ned ($y<0$) og slippes, og de kreftene som kommer i tillegg til dem fra fig 2, er påført fig 3

$$-ky - b\frac{dy}{dt} = m\frac{d^2y}{dt^2} \Rightarrow \frac{d^2y}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dy}{dt} + \frac{k}{m}y = 0$$

$$\alpha = \frac{b}{2m} \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad \Rightarrow \underline{\frac{d^2y}{dt^2} + 2\alpha\frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0}$$

d) $y(t) = A e^{-\alpha t}\cos(\omega t + \varphi)$

$$\frac{dy}{dt} = A[-\alpha e^{-\alpha t}\cos(\omega t+\varphi) - \omega e^{-\alpha t}\sin(\omega t+\varphi)]$$
$$= -Ae^{-\alpha t}[\omega\sin(\omega t+\varphi) + \alpha\cos(\omega t+\varphi)]$$

Startbetingelser: $y(0) = A_0 = A\cos\varphi$ (1)

$$\frac{dy(0)}{dt} = 0 = -A[\omega\sin\varphi + \alpha\cos\varphi] \quad (2)$$

Av (2): $\tan\varphi = -\frac{\alpha}{\omega}$

$$\cos\varphi = \frac{1}{\sqrt{1+\tan^2\varphi}} = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\alpha}{\omega}\right)^2}} = \frac{\omega}{\sqrt{\omega^2+\alpha^2}}$$

Dempede svingninger: $\omega^2 = \omega_0^2 - \alpha^2 \Rightarrow \omega_0^2 = \omega^2 + \alpha^2 \Rightarrow \cos\varphi = \frac{\omega}{\omega_0}$

Av (1): $A_0 = A\cos\varphi = A\frac{\omega}{\omega_0} \Rightarrow \underline{A = A_0\frac{\omega_0}{\omega}}$ q.e.d.

e) $b = 6\pi\eta r$ $\qquad b = 2m\alpha$

$$6\pi\eta r = 2m\alpha \Rightarrow \eta = \frac{2m\alpha}{6\pi r} = \frac{2m\sqrt{\omega_0^2-\omega^2}}{6\pi r}$$

$$m = \frac{4}{3}\pi r^3\cdot\rho$$

$$\eta = \frac{2\cdot 4\pi r^3\rho\sqrt{\omega_0^2-\omega^2}}{3\cdot 6\pi r} = \frac{4r^2\rho\sqrt{\omega_0^2-\omega^2}}{9}$$

$$= \frac{4\cdot 10^{-4}\cdot 7.8\cdot 10^3\sqrt{9.42^2-9.32^2}}{9}\ \mathrm{Pa\cdot s} \qquad = \underline{0{,}475\ \mathrm{Pa\cdot s}}$$

f) $\tan\varphi = -\frac{\alpha}{\omega} \Rightarrow \underline{\varphi = \arctan\left(-\frac{\alpha}{\omega}\right)}$

$\cos\varphi = \frac{\omega}{\omega_0} \Rightarrow \underline{\varphi = \arccos\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$. $\Bigg\} \Rightarrow \sin\varphi = -\frac{\alpha}{\omega_0}$

$\underline{\varphi = \arcsin\left(-\frac{\alpha}{\omega_0}\right)}$

$\varphi = \arccos\left(\frac{9.32}{9.42}\right) = \underline{-8{,}36° = -0{,}146 \text{ radianer}}$ (neg!)

$$v = \frac{dy(t)}{dt} = -Ae^{-\alpha t}(\omega\sin(\omega t+\varphi) + \alpha\cos(\omega t+\varphi))$$

$$= -Ae^{-\alpha t}(\omega\sin\omega t\cos\varphi + \omega\cos\omega t\sin\varphi + \alpha\cos\omega t\cos\varphi - \alpha\sin\omega t\sin\varphi)$$

$\cos\varphi = \frac{\omega}{\omega_0} \qquad \sin\varphi = -\frac{\alpha}{\omega_0}$

$$v = -Ae^{-\alpha t}\left(\frac{\omega^2}{\omega_0}\sin\omega t - \frac{\omega\alpha}{\omega_0}\cos\omega t + \frac{\alpha\omega}{\omega_0}\cos\omega t + \frac{\alpha^2}{\omega_0}\sin\omega t\right)$$

$$= -Ae^{-\alpha t}\sin\omega t\ \frac{\omega^2+\alpha^2}{\omega_0} = -Ae^{-\alpha t}\sin\omega t\cdot\frac{\omega_0^2}{\omega_0}$$

$$v = \frac{dy(t)}{dt} = \underline{-A\omega_0 e^{-\alpha t}\sin\omega t} \qquad \text{q.e.d.}$$

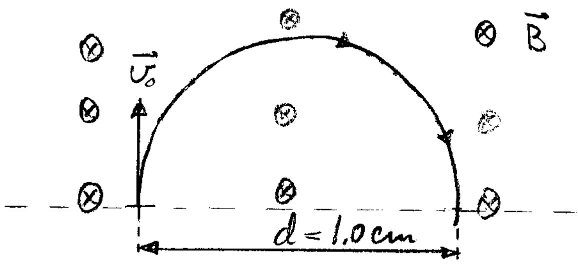
g) Kritisk demping:

$$\omega = \sqrt{\omega_0^2-\alpha^2} = 0 \Longrightarrow \alpha_{krit} = \omega_0 = 9{,}42\ s^{-1}$$

$$\eta = \frac{2m\alpha}{6\pi r} \Longrightarrow \frac{\eta_{krit}}{\eta} = \frac{\alpha_{krit}}{\alpha}$$

$$\Rightarrow \eta_{krit} = \eta\cdot\frac{\alpha_{krit}}{\sqrt{\omega_0^2-\omega^2}} = 0{,}475\cdot\frac{9{,}42}{\sqrt{9{,}42^2-9{,}32^2}}\ \mathrm{Pa\cdot s} = \underline{3{,}27\ \mathrm{Pa\cdot s}}$$

Oppgave 2



Feltet er avgrenset som antydet

a) $\vec{F} = m\vec{a}$ $\qquad q(\vec{v}\times\vec{B}) = m\vec{a}$

$$q v_0 B = m\frac{v_0^2}{r}$$

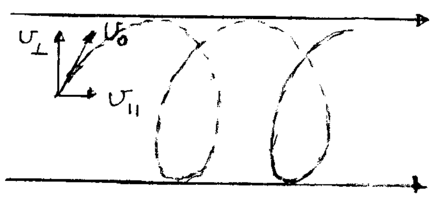
$$|B| = \left|\frac{m v_0}{q r}\right| = \frac{9{,}11\cdot 10^{-31}\cdot 3{,}5\cdot 10^{7}}{1{,}6\cdot 10^{-19}\cdot 0{,}5\cdot 10^{-2}}\,T = \underline{4{,}0\cdot 10^{-2}\,T}$$

$q<0$ Høyrehåndsregelen gir da at retningen av $\vec{B}$ blir inn i papiret hvis halvsirkelen er i papirplanet som vist i figuren.

b) Banelengde $l = \pi\cdot r = \pi\cdot\frac{d}{2}$

$$t = \frac{l}{v_0} = \frac{\pi\cdot d}{2 v_0} = \frac{\pi\cdot 0.01}{2\cdot 3.5\cdot 10^{7}}\,s = \underline{4.5\cdot 10^{-10}\,s}$$

c)

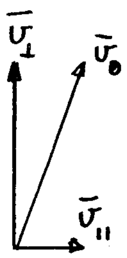


$$\vec{v}_0 = \vec{v}_\perp + \vec{v}_{\parallel}$$

$$v_{\parallel} = v_0\cos 65^\circ = 3.5\cdot 10^{7}\cdot\cos 65^\circ\ m/s$$

$$v_\perp = v_0\sin 65^\circ = 3.5\cdot 10^{7}\sin 65^\circ\ m/s$$

$\vec{v}_{\parallel}$ er parallell med feltet, og gir ingen kraft i samvirke med $\vec{B}$. $\vec{v}_\perp$ gir kraft vinkelrett på $\vec{B}$, og kraften endrer retning hele tiden, men alltid slik at den er vinkelrett på $\vec{B}$ og $\vec{v}_\perp$. $\vec{v}_\perp$ gir derfor sirkelbevegelse som blir overlagret den lineære bevegelsen $\parallel \vec{B}$ pga $\vec{v}_{\parallel}$ $\Rightarrow$ Spiralbevegelse.
Kraftvirkningen blir ut av papirplanet.
$\Rightarrow$ Spiralen blir en høyrehånds skrue.

d) 

Fra a): $r = \dfrac{m v_\perp}{|q| B}$ $\qquad v_\perp = v \cdot \sin 65°$

$$r = \frac{9{,}11 \cdot 10^{-31} \cdot 3{,}5 \cdot 10^{7} \cdot \sin 65°}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^{-2}} \, m = \underline{3{,}6 \cdot 10^{-3} \, m}$$

Omløpstid (periode): $T = \dfrac{2\pi r}{v_\perp} = \dfrac{2\pi m v_\perp}{|q| B v_\perp} = \dfrac{2\pi m}{|q| B}$

Stigning $s = v_{\parallel} \cdot T = v_0 \cdot \cos 65° \cdot \dfrac{2\pi m}{|q| B}$

$$= \frac{3{,}5 \cdot 10^{7} \cdot \cos 65° \cdot 2\pi \cdot 9{,}11 \cdot 10^{-31}}{1{,}6 \cdot 10^{-19} \cdot 5 \cdot 10^{-2}} \, m = \underline{1{,}06 \cdot 10^{-2} \, m}$$

Oppgave 3

a) Egnet gaussflate er en sylinder med lengde l

$0 < r \leq R_1$: Omsluttet ladning: $\pi r^2 l \rho$

$$\oint \bar{E}\, d\bar{A} = E \cdot 2\pi r l = \frac{\pi r^2 l \rho}{\varepsilon_0}$$

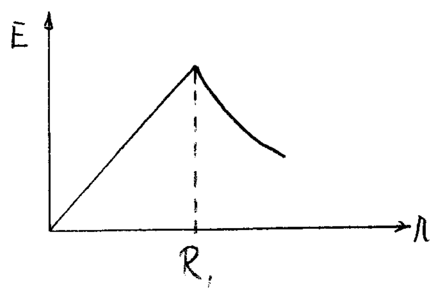
$$E = \frac{\rho r}{2\varepsilon_0} \Rightarrow \underline{\bar{E} = \frac{\rho \bar{r}}{2\varepsilon_0}}$$

$r > R_1$: Omsluttet ladning $\pi R_1^2 l \cdot \rho$

$$\oint \bar{E}\, d\bar{A} = E \cdot 2\pi r l = \frac{\pi R_1^2 l \rho}{\varepsilon_0}$$

$$E = \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0 r} \Rightarrow \underline{\bar{E} = \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0 r} \cdot \hat{r}}$$

$\hat{r}$ er enhetsvektor i radiell retning



b)

$0 < r \leq R_1$: Som for a): $\underline{\bar{E} = \frac{\rho \bar{r}}{2\varepsilon_0}}$

$R_1 < r < R_2$: Som for $r > R_1$ under a): $\underline{\bar{E} = \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0 r} \cdot \hat{r}}$

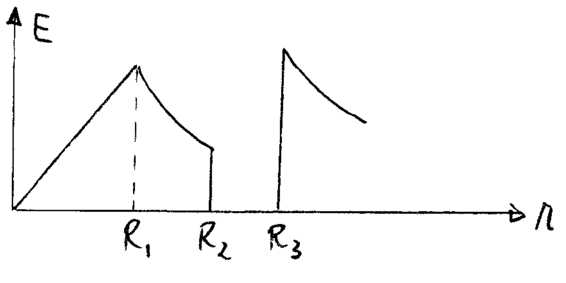
$R_2 < r < R_3$: Elektrisk felt er null i metallisk leder

$\underline{E = 0}$

$r > R_3$: Omsluttet ladning: $\pi R_1^2 l \cdot \rho + \lambda \cdot l$

$$\oint \bar{E}\, d\bar{A} = E \cdot 2\pi r l = \frac{1}{\varepsilon_0}\left(\pi R_1^2 l \rho + \lambda l\right)$$

$$E = \frac{\pi R_1^2 \rho + \lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \Rightarrow \underline{\bar{E} = \frac{\pi R_1^2 \rho + \lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \cdot \hat{r}}$$



c) λ_i er ladning pr lengdeenhet på innerflaten av den ytre sylinderen. λ_y er ladning pr lengde-enhet på ytterflaten av den ytre sylinderen.

Vi legger en gaussflate slik at $R_2 < r < R_3$.

Omsluttet ladning er da $\pi R_1^2 l \cdot \rho + \lambda_i \cdot l$.

$E = 0$ for $R_2 < r < R_3$

$$\Rightarrow 0 = \frac{1}{\varepsilon_0}(\pi R_1^2 l \cdot \rho + \lambda_i \cdot l) \Rightarrow \underline{\lambda_i = -\pi R_1^2 \cdot \rho}$$

$$\lambda = \lambda_i + \lambda_y \Rightarrow \lambda_y = \lambda - \lambda_i \qquad \lambda_y = \underline{\lambda + \pi R_1^2 \cdot \rho}$$

d) Energitettheten er generelt $u = \frac{1}{2}\varepsilon_0 E^2$

$R_1 < r < R_2$: $\quad E = \frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0 r}$

$$U_{12} = \frac{1}{2}\varepsilon_0 \int_{R_1}^{R_2} \left(\frac{\rho R_1^2}{2\varepsilon_0 r}\right)^2 \cdot \frac{2\pi r l \, dr}{l} = \frac{\pi \cdot \rho^2 \cdot R_1^4}{4\varepsilon_0} \int_{R_1}^{R_2} \frac{1}{r} dr$$

$$\underline{U_{12} = \frac{\pi \rho^2 R_1^4}{4\varepsilon_0} \ln \frac{R_2}{R_1}}$$

Oppgave 4

a) Ved refleksjon på en grenseflate mot et medium med høyere brytningsindeks får lyset et fasesprang på π. Ved refleksjon på en grenseflate mot et medium med lavere brytningsindeks blir det ikke fasesprang. Det blir det heller ikke ved transmisjon gjennom grenseflaten.

b) 1 og 2: Stråle 1 får fasesprang π ved refleksjonen. Stråle 2 får ikke fasesprang ved refleksjonen. Bølgelengden inne i avsatsen er λ/n, og stråle 2 går en ekstra distanse $2d$ i forhold til stråle 1.

Konstruktiv interferens: $2\pi \cdot \frac{2dn}{\lambda} - \pi = m \cdot 2\pi$

$\Rightarrow \lambda = \frac{2dn}{m+\frac{1}{2}}$ Størst mulige λ for $m=0$, dvs for

$$\lambda = \frac{2 \cdot 63.5 \cdot 1.53}{0.5}\ \text{nm} = \underline{389\ \text{nm}}$$ som er utenfor det synlige område

1 og 3: Begge strålene får fasesprang π ved refleksjonen. Ser derfor bort på fasespranget

$2\pi\left(\frac{2dn}{\lambda} + \frac{2D}{\lambda}\right) = m \cdot 2\pi \Rightarrow \lambda = \frac{2(d \cdot n + D)}{m}$ gir konstruktiv interferens

$m=1$: $\lambda = \frac{2(63.5 \cdot 1.53 + 127)}{1}\ \text{nm} = \underline{448\ \text{nm}}$ (blåfiolett)

$m>1$: λ utenfor synlig område.

2 og 3: Stråle 3 får fasesprang π ved refleksjonen, mens stråle 2 ikke får slikt fasesprang. Stråle 3 går en ekstra distanse $2D$ i forhold til stråle 2

$2\pi \frac{2D}{\lambda} - \pi = m \cdot 2\pi \Rightarrow \lambda = \frac{2D}{m+1/2}$ gir konstruktiv interferens

$m=0$: $\lambda = \frac{2 \cdot 127}{0.5}\ \text{nm} = \underline{508\ \text{nm}}$ (grønt)

$m>0$ utenfor synlig område.