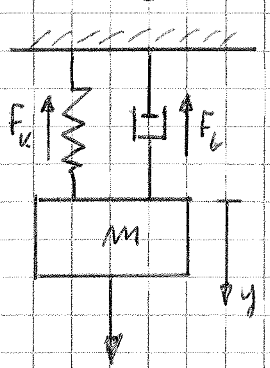
Oppgave 1 a) Vi tar utgangspunkt i likevektsposisjonen, og setter kreftene lik null der



$$m\frac{d^2y}{dt^2} = F_b + F_k = -b\frac{dy}{dt} - ky$$

$$m\frac{d^2y}{dt^2} + b\frac{dy}{dt} + ky = 0$$

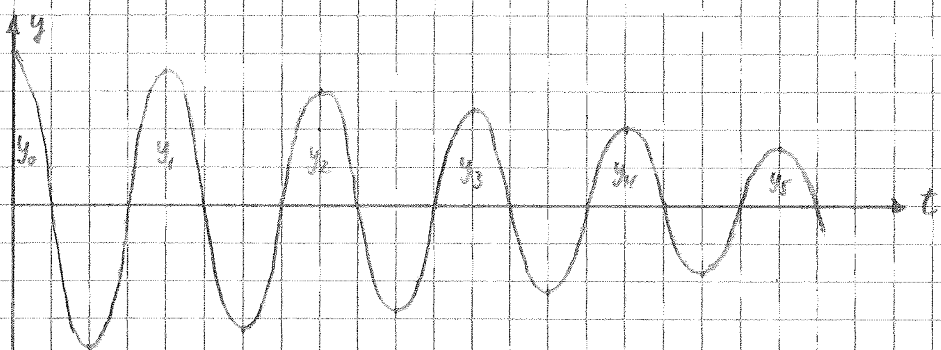
$$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dy}{dt} + \frac{k}{m}y = 0$$

$$\gamma = \frac{b}{2m} \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

$$\underline{\frac{d^2y}{dt^2} + 2\gamma\frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0}$$

$$y(t) = Ae^{-\gamma t}\sin(\omega t + \alpha) \qquad \text{der } \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \gamma^2}$$

En betingelse for denne løsningen er at $\omega_0^2 > \gamma^2$



Oppgitt: $\frac{y_0}{y_5} = \frac{1}{1/4} = 4 \qquad y_0 = y(0) = A_0 \qquad \frac{dy(0)}{dt} = 0$

$$\frac{dy(t)}{dt} = \omega Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \alpha) - \gamma Ae^{-\gamma t}\sin(\omega t + \alpha)$$

$$\frac{dy(0)}{dt} = \omega A\cos\alpha - \gamma A\sin\alpha = 0 \qquad \text{I}$$

$$y(0) = A\sin\alpha = A_0 \qquad \text{II}$$

Setter II inn i I:

$$\omega A\cos\alpha - \gamma A_0 = 0 \Rightarrow A\cos\alpha = \frac{\gamma A_0}{\omega} \qquad \text{III}$$

II/III: $\tan\alpha = \frac{\omega}{\gamma} \Rightarrow \underline{\alpha = \arctan\frac{\omega}{\gamma}} \qquad \underline{A = \frac{A_0}{\sin\alpha}}$

2

Kvadrerer og adderer II og III:

$$A^2\cos^2\alpha + A^2\sin^2\alpha = \frac{\gamma^2 A_0^2}{\omega^2} + A_0^2 = A_0^2\left(1+\frac{\gamma^2}{\omega^2}\right)$$

$$A^2 = A_0^2\left(\frac{\gamma^2+\omega^2}{\omega^2}\right) = A_0\left(\frac{\gamma^2+\omega_0^2-\gamma^2}{\omega^2}\right) = A_0^2\,\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$$

$$\underline{A = A_0\,\frac{\omega_0}{\omega}} \quad \text{q.e.d.}$$

b) $\frac{y_0}{y_1} = \frac{e^{-\gamma \cdot 0}\sin\alpha}{e^{-\gamma T}\sin\alpha}$ der perioden $T = \frac{2\pi}{\omega}$ slik at $\sin(\omega T+\alpha) = \sin\alpha$

$$\Rightarrow \frac{y_0}{y_1} = e^{\frac{2\pi\gamma}{\omega}}$$

Det er en periode mellom hver hele svingning, slik at

$$\frac{y_0}{y_1} = \frac{y_1}{y_2} = \frac{y_2}{y_3} = \frac{y_3}{y_4} = \frac{y_4}{y_5}$$

$$\frac{y_0}{y_5} = \frac{y_0 \cdot y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot y_4}{y_1 \cdot y_2 \cdot y_3 \cdot y_4 \cdot y_5} = \left(\frac{y_0}{y_1}\right)^5$$

$$\frac{y_0}{y_1} = e^{5\cdot\frac{2\pi\gamma}{\omega}} = 4 \Rightarrow \frac{10\pi\gamma}{\omega} = \ln 4$$

$$\frac{\omega}{\gamma} = \frac{10\pi}{\ln 4} = 22.65 \Rightarrow \omega = 22.65\cdot\gamma$$

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \sqrt{\frac{1000}{10}}\,s^{-1} = 10\,s^{-1}$$

$$\omega^2 = \omega_0^2 - \gamma^2 \Rightarrow 22.65^2\cdot\gamma^2 = 10^2 - \gamma^2$$

$$513\gamma^2 = 100 - \gamma^2 \Rightarrow \gamma = \sqrt{\frac{100}{514}} = 0.441$$

$$b = 2m\gamma = 2\cdot 10\cdot 0.441 = 8.82 \qquad \text{O: } \underline{8.82\ \frac{Ns}{m}}$$

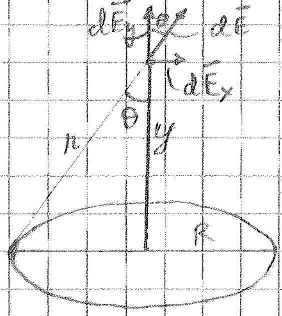
c) $\frac{y_0}{y_n} = \frac{y_0\ y_1 \cdots y_{n-1}}{y_1\ y_2 \cdots y_n} \Rightarrow \frac{y_0}{y_n} = \left(\frac{y_0}{y_1}\right)^n = e^{\frac{n\cdot 2\pi\gamma}{\omega}}$

$$\ln\left(\frac{y_0}{y_n}\right) = \frac{2\pi\gamma n}{\omega}$$

$$n = \frac{\omega}{2\pi\gamma}\ln\left(\frac{y_0}{y_n}\right) = \frac{\omega}{2\pi\gamma}\ln\left(\frac{1}{0.1}\right) = \frac{22.65\ \ln 10}{2\pi} = \underline{8.3}$$

Amplituden er blitt 0.1 ganger den opprinnelige etter 8.3 svingninger, dvs den er $< 0.1\cdot A_0$ etter 9 hele svingninger.

Oppgave 2.



a) Når vi summerer alle bidragene til $\vec{E}_x$, får vi null av symmetrigrunner

$\Rightarrow$ Totalfeltet er rettet langs aksen.

$$dE_y = dE \cos\theta$$

$$dE = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

$\cos\theta$ og r er konstanter når vi integrerer langs (rundt) ringen, og vi får

$$\vec{E}_y = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\cos\theta \cdot \hat{y}$$

$$r = \sqrt{R^2 + y^2} \qquad \cos\theta = \frac{y}{r}$$

$$\Rightarrow \underline{\vec{E} = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{y}{(R^2+y^2)^{3/2}} \cdot \hat{y}}$$

$$E = \frac{1\cdot 10^{-9} \cdot 0{,}05}{4\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}(0{,}05^2 + 0{,}05^2)^{3/2}} \ \mathrm{V/m} \qquad = \underline{1{,}27 \cdot 10^3 \ \mathrm{V/m}}$$

b) $$\vec{F} = Q_1 \vec{E} = \frac{Q_1 Q_2 \cdot y}{4\pi\varepsilon_0 (R^2+y^2)^{3/2}} \cdot \hat{y}$$

$$F = Q_1 E = 5\cdot 10^{-9} \, 1{,}27 \cdot 10^3 \ \mathrm{N} \qquad = \underline{6{,}35 \cdot 10^{-6} \ \mathrm{N}}$$

Vi kan finne potensialet ved å integrere bidrag til Coulombpotensialet rundt ringen.

$$dV = \frac{dQ}{4\pi\varepsilon_0 r}$$ r er konstant under integrasjon rundt ringen.

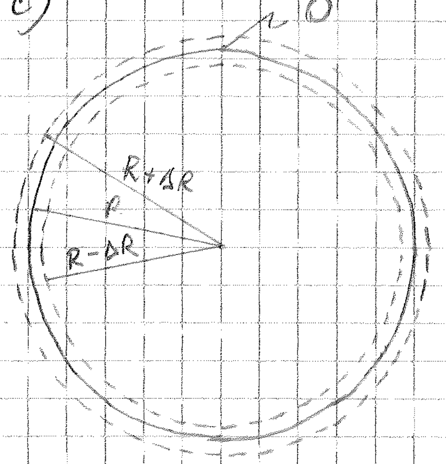
$$\Rightarrow V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = \underline{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{(R^2+y^2)^{1/2}}}$$

$$V = \frac{1\cdot 10^{-9}}{4\pi \cdot 8.85 \cdot 10^{-12}(0{,}05^2 + 0{,}05^2)^{1/2}} \ \text{Volt} \qquad = \underline{127 \ \text{Volt}}$$

En alternativ metode for å finne potensialet er å integrere E-feltet:

$$V = -\int_{\infty}^{y} E\,dy = \frac{-Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\infty}^{y}\frac{y\,dy}{(R^2+y^2)^{3/2}} = \underline{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 (R^2+y^2)^{1/2}}}$$ som før

c)



Feltet i pktet O på kuleflaten er gitt som middelverdien av feltet like utenfor (R+ΔR) og like innenfor (R-ΔR) $\Delta R \to 0$

Vi bruker Gauss' sats. Feltene langs de to stiplede flatene er konstante pga kulesymmetrien.

$$\int \bar{E}\,d\bar{A} = EA = \frac{Q_{\text{innenfor gaus}}}{\varepsilon_0} \Rightarrow E = \frac{Q_{\text{innenfor gaus}}}{\varepsilon_0 \cdot A}$$

$$E(R+\Delta R) = \frac{Q}{\varepsilon_0 A} = \frac{\sigma}{\varepsilon_0} \quad \text{når } \Delta R \to 0$$

$$E(R-\Delta R) = 0$$

Feltet E_0 på overflaten: $E_0 = \dfrac{E(R+\Delta R)+E(R-\Delta R)}{2} = \dfrac{\sigma}{2\varepsilon_0}$

Kraften på elementet dA (med ladning $\sigma\,dA$):

$$dF = E_0 \cdot \sigma\,dA = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}\cdot\sigma\,dA = \underline{\frac{\sigma^2 dA}{2\varepsilon_0}} \quad \text{q.e.d.}$$

d) På flateelementet over kraften et trykk

$$\frac{dF}{dA} = \frac{\sigma^2}{2\varepsilon_0} = \frac{Q^2}{(4\pi R^2)^2\cdot 2\varepsilon_0}$$

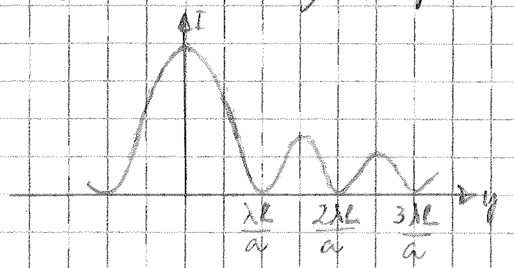
Dette settes lik trykket fra overflatespenningen:

$$2\alpha/R = \frac{Q^2}{(4\pi R^2)^2\cdot 2\varepsilon_0} \Rightarrow \underline{Q = 8\pi R\sqrt{\varepsilon_0 \alpha R}} \quad \text{q.e.d.}$$

$$Q = 8\pi\cdot 5\cdot 10^{-6}\sqrt{8.85\cdot 10^{-12}\cdot 73\cdot 10^{-3}\cdot 5\cdot 10^{-6}}\ C = \underline{2.26\cdot 10^{-13}\ C}$$

Oppgave 3

a) En spalte:



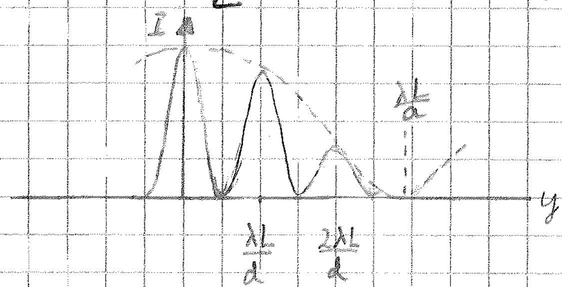
Minima ved $a \sin\theta = n\lambda$

$\sin\theta \approx \tan\theta = \frac{y}{L}$

$\Rightarrow a \cdot \frac{y}{L} = n\lambda \Rightarrow y = \frac{n\lambda L}{a}$

To spalter: Interferens mellom bølgefeltene fra de to spaltene. Interferensmaksima ved $d \sin\theta = n\lambda$

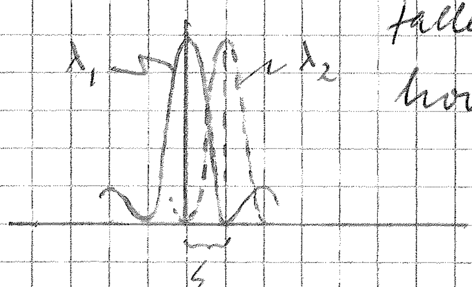
$$\Rightarrow d\,\frac{y}{L} = n\lambda \quad \Rightarrow y = \frac{n\lambda L}{d}$$



b) Minst mulig lys i 3. orden $\Rightarrow$ 3. orden bør falle i diffraksjonsminimum:

$$\frac{3\lambda L}{d} = \frac{\lambda L}{a} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{a} = \underline{3}$$

c) Rayleigh:



Rayleighs kriterium

2. ordens hovedmaksimum for λ_2 må falle i 1. minimum etter 2. ordens hovedmaksimum for λ_1

$$R = \frac{\lambda}{\Delta\lambda} = m \cdot N$$

$$\frac{589.0}{589.6 - 589.0} = 2N$$

$N = \frac{982}{2} = 491$: $\underline{491 \text{ spalter}}$

6

d) Posisjoner gitt ved

$$d \sin\theta = m \cdot \lambda$$

$$d = \frac{1}{2000}\,\text{cm} = 5 \cdot 10^{-6}\,\text{m}$$

$m = 2$

$$\sin\theta_1 = \frac{2\lambda_1}{d} = \frac{2 \cdot 589{,}0 \cdot 10^{-9}}{5 \cdot 10^{-6}} = 0{,}2356 \Rightarrow \theta_1 = 13{,}627^\circ$$

$$\sin\theta_2 = \frac{2 \cdot \lambda_2}{d} = \frac{2 \cdot 589{,}6 \cdot 10^{-9}}{5 \cdot 10^{-6}} = 0{,}23584 \Rightarrow \theta_2 = 13{,}641^\circ$$

$$y_1 = 2\,\text{m} \cdot \tan 13.627^\circ = \underline{\underline{0.4848\,\text{m}}}$$

$$y_2 = 2\,\text{m} \cdot \tan 13.641^\circ = \underline{\underline{0.4854\,\text{m}}}$$

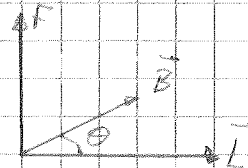
$$\Delta y = (0.4854 - 0.4848)\,\text{m} = \underline{\underline{0.6\,\text{mm}}}$$

De to maksima kan så vidt skjelnes fra hverandre.

Oppgave 4

a) $\vec{F} = I\vec{L} \times \vec{B}$ $\qquad F = ILB\sin\theta$

$$\sin\theta = \frac{F}{ILB} = \frac{0.36}{7.2 \cdot 0.06 \cdot 0.900} \Rightarrow \underline{\theta = 67.8^\circ}$$



Retningen av $\vec{L}$ er tatt i retning av strømmen. Kraften $\vec{F}$ er vinkelrett på både $\vec{B}$ og $\vec{L}$ som vist.

b) Antall ladningsbærere er produktet av volumet og ladningsbærertettheten, dvs $N = n \cdot Lwd$. Den magnetiske kraften på ladningsbærerne er balansert av den elektriske kraften:

$$ILB = NeE = nLwd\, e\, \frac{\Delta V}{w}$$

$$\Rightarrow \underline{n = \frac{IB}{ed\Delta V}} \quad \text{q.e.d.}$$

$$j = \frac{I}{A} = env_d \Rightarrow \frac{I}{wd} = e\frac{IB}{ed\Delta V} \cdot v_d$$

$$\Rightarrow \underline{v_d = \frac{\Delta V}{w \cdot B}}$$

c) Vi forutsetter samme strøm, dermed samme strømtetthet og samme driftshastighet i de to tilfellene

$$\frac{\Delta V_1}{B_1} = \frac{\Delta V_2}{B_2} \Rightarrow B_2 = \frac{\Delta V_2}{\Delta V_1} B_1 = \frac{720}{122}\, 0.15\,T = \underline{0.885\,T}$$

d) $\frac{1}{2}mv^2 = qV \Rightarrow v = \sqrt{\frac{2qV}{m}} \Rightarrow \underline{v_1 = \sqrt{\frac{2qV}{m_1}}} \qquad \underline{v_2 = \sqrt{\frac{2qV}{m_2}}}$

$$\Rightarrow \underline{\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{m_1}{m_2}}}$$

Sirkelbane, jevn banehastighet: $ma = m\frac{v^2}{R} = qvB$

$$\Rightarrow R = \frac{mv}{qB} \Rightarrow R_1 = \frac{m_1 v_1}{qB} \qquad R_2 = \frac{m_2 v_2}{qB}$$

$$\frac{R_2}{R_1} = 1.4 = \frac{m_2 v_2}{m_1 v_1} = \frac{m_2}{m_1}\sqrt{\frac{m_1}{m_2}} = \sqrt{\frac{m_2}{m_1}}$$

$$\frac{m_2}{m_1} = \left(\frac{R_2}{R_1}\right)^2 = 1.4^2 = 1.96 \approx \underline{2}$$