NORGES TEKNISK-NATURVITENSKAPELIGE
UNIVERSITET
INSTITUTT FOR FYSIKK

Eksamen gitt av Kåre Olaussen

Løsningsforslag til
Eksamen i fag SIF4004 FYSIKK for
ELEKTROTEKNIKK OG TELEKOMMUNIKASJON
Mandag 7. august 2000
Tid: 09:00–15:00

Dette løsningsforslaget er på 10 sider.

Oppgave 1:

Nedenforstående notis er tatt fra Adresseavisen's utgave den 12. juli 2000:

Fart er relativt

Tenk deg at du kjører i 80 *km/t, og plutselig ser en elg i veien rundt svingen. Du bråbremser og stopper akkurat i tide. Men hva hadde skjedd hvis du hadde kjørt i* 100 *km/t? Vel,* $100 - 80$ *er* 20*, altså* 20 *km/t. Trodde du. Men så enkelt er det nok ikke. Bremselengde øker med kvadratet på farten, og faktum er at du med samme reaksjonstid da ville kjørt på elgen med* 70 *km/t! Og hadde du bare økt til* 90 *km/t, ville kollisjonen med elgen skjedd i* 50 *km/t. (Statens Vegvesen).*

En erfaren avisleser, med daglig virke på Gløshaugen, slites mellom to instinktive reaksjoner (fordommer):

i) Journalister kan overhodet ikke regne, og roter alltid til tekniske utsagn. Så innholdet i notisen er helt sikkert ikke korrekt.

ii) Informasjonen kommer tydeligvis fra Statens Vegvesen, høyst sannsynlig fra en topp utdannet (altså NTNU) sivilingeniør. Så innholdet i notisen er helt sikkert korrekt.

a) Analyser problemstillingen i notisen, og ta på grunnlag av dette standpunkt til om innholdet kan sies å være korrekt eller ikke.

En fullstendig besvarelse av oppgaven krever at du setter opp, og løser, en matematisk modell av problemet. For dette bør du lese notisen grundig, slik at du gjør de samme antagelsene som den ser ut til å legge til grunn. Du bør også nevne eventuelle fysiske effekter som du velger å se bort fra i modellen — og helst også i hvilken retning du tror slike vil påvirke resultatet.

Merk: Rene gjetteløsninger på dette punktet belønnes med delkarakteren 8.0, uansett om det gjettes rett eller galt. (Sivilingeniører fra NTNU skal ikke gamble.)

I notisen sies det at *bremselengden øker med kvadratet på farten.* Dette forteller oss at bremsekraften antas å være konstant.

Dette bør være velkjent for alle kandidatene, men det er også lett å utlede. Tenk at bevegelsen observeres baklengs, slik at vi får sammenhengen $s = kv^2$ mellom avstand fra stoppunktet og hastigheten. Ved tidsderivasjon finner man at

$$v = \frac{ds}{dt} = 2kva$$

som etter forkortning med v viser at akselerasjonen a er en konstant.

Det står også at det antas *samme reaksjonstid*, så vi bør anta en modell med reaksjonstid $t_r > 0$. Det sies ingenting om hvorvidt vi kjører i motbakke, på flat vei, eller i unnabakke, men dette vil bare endre bremsekraften (som uansett ikke er oppgitt) til en annen konstant. Det sies ingenting om elgens bevegelse, så vi får anta at den står i ro.

I det følgende skal i regne med enheter der hastighet måles i km/t (for å få en litt enklere form på ligningene nedenfor). Dette gir oss følgende modell for hastighet v og utkjørt distanse s (målt fra det tidspunkt vi oppdager elgen):

$$v = v_0 - a(t - t_r), \qquad s = v_0 t - \frac{1}{2}a(t - t_r)^2. \tag{1}$$

Denne ligningen er bare gyldig sålenge $0 \le (t - t_r) \le v_0/a$. Bremsetiden $t_{v_0} = t - t_r$ ved 80 km/t er altså $t_{80} = 80/a$, og total avstand til elgen er lik

$$s_{\text{elg}} = 80 t_r + \frac{1}{2a} 80^2. \tag{2}$$

Dette gir oss en ligning for tilgjengelig bremsetid t_{v_0} ved hastghet $v_0 \ge 80$:

$$s_{\text{elg}} = v_0 \left(t_{v_0} + t_r\right) + \frac{1}{2a} \left(a t_{v_0}\right)^2. \tag{3}$$

Vi er egentlig ikke så interessert i bremsetiden, kun i slutthastigheten $v_1 = v_0 - a t_{v_0}$. Så vi setter inn for $t_{v_0} = (v_0 - v_1)/a$ i ligning (3), og identifiserer denne med (2). Dette gir oss ligningen

$$\frac{v_0^2}{2a} - \frac{v_1^2}{2a} + v_0 t_r = 80 t_r + \frac{80^2}{2a},$$

med løsning

$$v_1 = \sqrt{v_0^2 - 80^2 + 2(v_0 - 80) a t_r} = \sqrt{(v_0 - 80)(v_0 + 80 + 2 a t_r)}. \tag{4}$$

Her er kombinasjonen $2at_r$ ukjent for oss (bortsett fra at den bør være positiv). Ved prøving og feiling finner vi at valget $2at_r = 70$ gir

$$v_1 = \begin{cases} 48.99 \text{ km/t} & \text{når } v_0 = 90 \text{ km/t}, \\ 70.71 \text{ km/t} & \text{når } v_0 = 100 \text{ km/t}. \end{cases} \tag{5}$$

Dette er akseptabelt nær tallene i notisen, så vi finner derfor ingen grunn til å sprøytvarsle den.

Men virker verdien $2at_r = 70$ rimelig? Med denne verdien og en (litt sløv?) reaksjonstid $t_r = 1.5$ s finner vi $a = 6.48 \text{ m/s}^2$. Dette er litt lavere enn det en lærebok for førerprøven[1] oppgir for panikkbremsing på tørr asfalt (nemlig $a = 7.71 \text{ m/s}^2$, svarende til en bremselengde fra 20 km/t på 2 m).

Den modellen vi har brukt tar ikke hensyn til luftmotstanden, som gir en bremsekraft proporsjonal med kvadratet av hastigheten, $F_2/m = -\gamma v^2$. Når denne kommer i tillegg

[1] Borch, Moe, Nermark, Torsmyr: *Veien til Førerkortet*, Autoriserte trafikkskolers landsforbund.

blir nedbremsing fra høye hastigheter mer effektiv, så de tallene som står i notisen er antagelig litt overdrevne.

Kommentar: Som ekstra bonus for den flittige og ambisiøse student som går gjennom løsningsforslaget ser vi nærmere på en modell som tar hensyn til luftmotstanden. Denne kan formuleres ved ligningen

$$\frac{dv}{dt} = -\frac{v_a}{t_a}\left(1+\frac{v^2}{v_a^2}\right), \tag{6}$$

der t_a og v_a er hensiktsmessige valgte parametre (slik at $\gamma = 1/(v_a t_a)$, og den konstante delen av akselerasjonen er $-a_0 = -v_a/t_a$). Ved å innføre $u = v/v_a$, $\tau = t/t_a$ kan (6) omskrives på formen

$$\frac{du}{1+u^2} = d\arctan u = -d\tau, \tag{7}$$

med løsning

$$u(\tau) = \tan(\tau_0 - \tau). \tag{8}$$

Parameteren τ_0 er bestemt av hastigheten rett før oppbremsingen begynner,

$$v_0 = v_a \tan\tau_0, \tag{9}$$

og vi ser at den er relatert til oppbremsingstiden ved

$$t_{v_0} = t_a\tau_0. \tag{10}$$

Siden vi kan velge $0 \le \tau_0 \le \pi/2$ er det en øvre grense for oppbremsingstiden sålenge t_a er endelig. En gangs integrasjon av (8) gir oss utkjørt distanse fra oppbremsningen begynte,

$$s = v_a t_a \log\frac{\cos(\tau_0-\tau)}{\cos(\tau_0)}. \tag{11}$$

Her er

$$s_0 = v_a t_a \log\frac{1}{\cos\tau_0} \tag{12}$$

den totale bremselengden (dette inkluderer ikke den strekningen $v_0 t_r$ som kjøres før sjåføren rekker å reagere).

Vi kan bruke ligning (8) til å eliminere tiden,

$$\cos^2(\tau_0-\tau) = \frac{1}{u^2+1} = \frac{v_a^2}{v^2+v_a^2},$$

slik at vi får

$$s = \frac{1}{2}v_a t_a \log\left(\frac{v_0^2+v_a^2}{v^2+v_a^2}\right). \tag{13}$$

Når vi også tar hensyn til reasjonstiden t_r fås sammenhengen

$$s_{\text{elg}} = 80t_r - \frac{1}{2}v_a t_a \log\left(\frac{v_a^2}{80^2+v_a^2}\right) = v_0 t_r - \frac{1}{2}v_a t_a \log\left(\frac{v_1^2+v_a^2}{v_0^2+v_a^2}\right). \tag{14}$$

der v_1 er slutthastigheten. Bilen møter derfor elgen med en hastighet

$$\begin{aligned} v_1 &= \left(\frac{v_a^2}{80^2+v_a^2}\right)^{1/2}\left\{\left(v_0^2+v_a^2\right)\exp\left[\frac{2(v_0-80)t_r}{v_a t_a}\right] - \left(80^2+v_a^2\right)\right\}^{1/2} \\ &= \left(\frac{1}{1+80^2\gamma/a_0}\right)^{1/2}\left\{\left(v_0^2+\frac{a_0}{\gamma}\right)\exp\left[2\gamma(v_0-80)t_r\right] - \left(80^2+\frac{a_0}{\gamma}\right)\right\}^{1/2} \end{aligned} \tag{15}$$

I grensen $\gamma \to 0$ reduserer dette svaret seg til ligning (4).

Hvis vi nå setter $t_r = 1.5$ s, $a_0 = 6.48$ m/s^2 som før, og estimerer luftmotstanden til $\gamma = 0.002$ m^{-1} (svarende til $v_a = 200$ km/t), finner vi slutthastigheter $v_1 = 46.9$ km/t når $v_0 = 90$ km/t, og $v_1 = 68.1$ km/t når $v_0 = 100$ km/t. Effekten av luftmotstanden er altså ganske beskjeden sålenge vi ikke kjører veldig-veldig fort — eller har en meget lite aerodynamisk bil.

b) Anta at den omtalte bilen med innhold veier 800 kg, og er utstyrt med skivebremser av stål (jern), der hver bremsetrommel veier 3 kg. Atomvekten til jern er 55.8.

Hva er den spesifikke varmekapasiteten for jern ifølge Dulong og Petit's lov?.

Dulog og Petit's lov sier at varmekapasiteten for *solider* er 3 k_B pr. atomkjerne. Med atomvekt 55.8 er vekten av hver kjerne lik $55.8\,m_u$, slik at den spesifikke varmekapasiteten for jern blir

$$c_{\text{Fe}} = \frac{3\,k_B}{55.8\,m_u} = \frac{3 \times 1.380\,658 \times 10^{-23}\ \text{J/K}}{55.8 \times 1.660\,540 \times 10^{-27}\ \text{kg}} = 447\,\frac{\text{J}}{\text{kg K}} \tag{16}$$

c) Bilen stanser så raskt at friksjonsvarmen mellom bremse-sko og -tromler ikke får tid til å dissipere ved varmetransport. Anta videre at veien er horisontal, og at bremseskoene ikke absorberer varme.

Hvor stor er temperaturøkningen i bremsetromlene når det blir bremset ned fra 80 km/t?

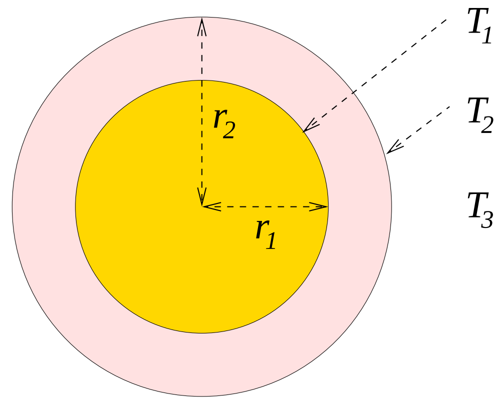
Ved oppbremsingen blir den kinetiske energien til bilen, $\frac{1}{2}M_{\text{biler}}v_0^2$, konvertert til varme i bremsetromlene, $c_{\text{Fe}}M_{\text{tromler}}\Delta T$. Temperaturøkningen blir derfor

$$\Delta T = \frac{1}{2}\,\frac{M_{\text{bil}}}{M_{\text{tromler}}}\,\frac{v_0^2}{c_{\text{Fe}}} = 36.8\ \text{K}. \tag{17}$$

Oppgave 2:

En koppertråd med sirkulært tversnitt og radius $r_1 = 10$ mm har en varmeutvikling på

$$i_Q = \frac{dQ}{dt} = 125\,\frac{\text{W}}{\text{m}} \tag{18}$$



når den fører en elektrisk strøm på 1500 A. Tråden er isolert med et materiale med varmeledningskoeffisient $\lambda = 0.20$ W/mK. Varmeovergangstallet mellom isolasjonsmaterialet og luften omkring settes til $h = 17.5$ W/m^{2}K. Luften omkring holder en temperatur $T_3 = 20\,°$C.

Denne oppgaven går ut på å dimensjonere tykkelsen på isolasjonsmaterialet slik at varmen som utvikles i lederen blir transportert mest mulig effektivt til omgivelsene, og å bestemme de resulterende temperaturene.

a) Skriv ned sammenhengen mellom varmefluksen j_Q i avstand $r > r_1$ fra sentrum av koppertråden, og varmestrømmen i_Q.

La ℓ være lengden av koppertråden.

$$j_Q = \frac{I_Q}{A} = \frac{i_Q\,\ell}{2\pi r\,\ell} = \frac{i_Q}{2\pi r}. \tag{19}$$

b) Anta at isolasjonsmaterialet har tykkelse $d = r_2 - r_1$, slik at radius til overflaten av isolasjonen er r_2.

Finn sammenhengen mellom varmestrømmen i_Q og temperaturfallet $\Delta T_{1\to 2}$ over isolasjonen. Du trenger foreløbig ikke sette inn tallverdier i svaret.

Vi omskriver varmeledningsloven på formen

$$dT = \frac{j_Q}{\lambda}\, dr = \frac{i_Q}{2\pi\lambda}\frac{dr}{r}.$$

Integrasjon gir

$$\Delta T_{1\to 2} = \frac{i_Q}{2\pi\lambda}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r} = \frac{i_Q}{2\pi\lambda}\log\left(\frac{r_2}{r_1}\right). \tag{20}$$

c) Finn sammenhengen mellom varmestrømmen i_Q og temperatutfallet $\Delta T_{2\to 3}$ mellom overflaten av isolasjonen og den omliggende luften. Du trenger foreløbig ikke sette inn tallverdier i svaret.

$$\Delta T_{2\to 3} = \frac{j_Q}{h} = \frac{i_Q}{2\pi h r_2} \tag{21}$$

d) Bestem radius r_2 slik at temperaturfallet $\Delta T_{1\to 3} = \Delta T_{1\to 2} + \Delta T_{2\to 3}$ blir minst mulig (når alle de andre parametrene i problemet er fastholdt). Du trenger foreløbig ikke sette inn tallverdier i svaret.

Vi minimerer temperaturfallet $\Delta T_{1\to 3} = [i_Q/(2\pi\lambda)][\log(r_2/r_1) + \lambda/(hr_2)]$

$$\frac{d\Delta T_{1\to 3}}{dr} = 0, \qquad \frac{d^2\Delta T_{1\to 3}}{dr^2} > 0.$$

Dette gir ligningen

$$\frac{1}{r_2} - \frac{\lambda}{hr_2^2} = 0.$$

Dvs.

$$r_2 = \frac{\lambda}{h}, \tag{22}$$

under forutsetning av at $r_1 < \lambda/h$.

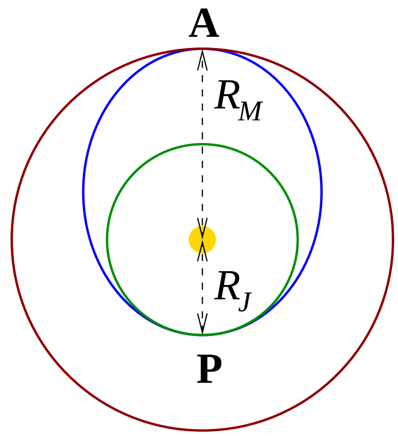
e) Finn tilslutt tallverdiene for r_2, $T_2 = \Delta T_{2\to 3} + T_3$, og $T_1 = \Delta T_{1\to 3} + T_3$.

Innsatt tallverdier fås

$$r_2 = \frac{0.2}{17.5}\ \mathrm{m} = 11.42\ \mathrm{mm}, \tag{23}$$

$$T_2 = \frac{i_Q}{2\pi\lambda} + T_3 = 119.5\ ^\circ\mathrm{C}, \tag{24}$$

$$T_1 = \frac{i_Q}{2\pi\lambda}\log\frac{\mathrm{e}r_2}{r_1} + T_3 = 132.8\ ^\circ\mathrm{C}. \tag{25}$$



Oppgave 3:

I denne denne oppgaven skal du se på forskjellige aspekter ved reiser i solsystemet, og tilslutt navigasjon fra jorda til Mars ved bruk av en såkalt *Hohmann transfer orbit*, dvs. reise langs en ellipse som tangerer jordbanen i perihelium (**P**, der ellipsen er nærmest sola) og Marsbanen i apihelium (**A**, der ellipsen er lengst fra sola). Som en god og nødvendig tilnærming antas det at både jorda og Mars går i perfekte sirkelbaner, og at all bevegelse skjer i samme plan.

a) Se først på bevegelse av en masse m langs en sirkel med radius R,

$$\vec{r}(t) = R\left[\cos\frac{2\pi t}{T}\,\hat{e}_x + \sin\frac{2\pi t}{T}\,\hat{e}_y\right], \tag{26}$$

og finn hastigheten $\vec{v}(t) = d\vec{r}(t)/dt$, og akselerasjonen $\vec{a}(t) = d\vec{v}(t)/dt$ for denne bevegelsen.

$$\vec{v}(t) = \frac{2\pi}{T}\,R\left[-\sin\frac{2\pi t}{T}\,\hat{e}_x + \cos\frac{2\pi t}{T}\,\hat{e}_y\right], \tag{27}$$

$$\vec{a}(t) = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 R\left[\cos\frac{2\pi t}{T}\,\hat{e}_x + \sin\frac{2\pi t}{T}\,\hat{e}_y\right] = -\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \vec{r}(t). \tag{28}$$

b) Anta at sola befinner seg i sentrum av sirkelen. Skriv ned gravitasjonskraften $\vec{F}$ fra sola på massen m, og bruk Newton's andre lov til å finne sammenhengen mellom omløpstiden T og baneradien R, uttrykt på symbolsk form ved solmassen M og Newton's gravitasjonskonstant G_N.

Gravitasjonskraften er

$$\vec{F} = -\frac{mMG_N}{R^2}\,\hat{r}(t) = -\frac{mMG_N}{R^3}\,\vec{r}(t) \tag{29}$$

Newton's andre lov, $\vec{F} = m\vec{a}$, gir betingelsen

$$-\frac{mMG_N}{R^3} = -m\left(\frac{2\pi}{T}\right)^2.$$

Eller

$$\frac{R^3}{T^2} = \frac{MG_N}{(2\pi)^2}. \tag{30}$$

Dette er Kepler's tredje lov.

c) Jorda har baneradius på $R_J = 0.1496\times10^{12}$ m og omløpstid på $T_J = 1$ år. Mars har baneradius på $R_M = 0.2279\times10^{12}$ m og omløpstid på $T_M = 1.88$ år. Kontroller at disse tallverdiene er i overensstemmelse med den sammenhengen du fant i forrige punkt.

Ligning (30) medfører at

$$\left(\frac{T_M}{T_J}\right)^2 = \left(\frac{R_M}{R_J}\right)^3. \tag{31}$$

Innsatt tallverdier

$$1.88^2 = \left(\frac{0.2279}{0.1496}\right)^3 \qquad \text{eller} \qquad 3.5344 = 3.5354$$

Altså en rimelig god overensstemmelse.

d) Skriv ned uttrykkene for energien E og dreieimpulsen $L = |\vec{r}(t) \times m\vec{v}(t)|$ til massen m, når den er i en sirkulær bane med radius R.

Vis ved utregning at $\delta \equiv \frac{EL^2}{m^3 M^2 G_N^2}$ er en dimensjonsløs konstant for alle sirkulære baner i solsystemet (og angi denne konstanten).

I det generelle uttrykket,

$$E = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mMG_N}{R},$$

setter vi inn for $v = 2\pi R/T = \sqrt{MG_N/R}$, og får

$$E = -\frac{mMG_N}{2R}. \tag{32}$$

Tilsvarende

$$L = mRv = \sqrt{m^2 M G_N R}. \tag{33}$$

Dette gir

$$\delta = \frac{EL^2}{m^3 M^2 G_N^2} = -\frac{1}{2}. \tag{34}$$

e) Hvor mye energi må tilføres for å løfte 1 kg masse fra jordbanen til Marsbanen? Har 1 kg masse i jordbanen større eller mindre dreieimpuls enn 1 kg masse i Marsbanen?

$$\begin{aligned}
\Delta E_{\mathrm{J}\to\mathrm{M}} &= 1\,\mathrm{kg}\, MG_N \left(\frac{1}{R_J} - \frac{1}{R_M}\right) = \frac{1}{2}\,\mathrm{kg}\,\left(v_J^2 - v_M^2\right) \\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{kg}\left[\left(\frac{2\pi R_J}{T_J}\right)^2 - \left(\frac{2\pi R_M}{T_M}\right)^2\right] \\
&= \frac{1}{2}\,\mathrm{kg}\left[(29.8\ \mathrm{km/s})^2 - (24.1\ \mathrm{km/s})^2\right] = 152 \times 10^6\ \mathrm{J}
\end{aligned} \tag{35}$$

En masse m i jordbanen har mindre dreieimpuls enn i Marsbanen ($L \propto \sqrt{R}$).

f) Vi skal nå gå over til å analysere mer generell bevegelse (dvs. elliptiske baner). Disse er forsatt karakterisert ved at dreieimpulsen L og energien E er bevegelseskonstanter, men kombinasjonen δ er ikke lenger lik den konstanten som ble funnet i pkt **3d**).

Vis, fra de generelle uttrykkene for energi E og dreieimpuls L, at vi har sammenhengene

$$v(t)^2 = \frac{2E}{m} + \frac{2MG_N}{R(t)}, \qquad u(t)^2 = \left(\frac{L}{mR(t)}\right)^2, \tag{36}$$

der $R(t) = |\vec{r}(t)|$ er (den nå tidsavhengige) avstanden fra sola, $v(t) = |\vec{v}(t)|$ er absoluttverdien til hastigheten, og $u(t) = |\hat{r}(t) \times \vec{v}(t)|$ er absoluttverdien til den komponenten av hastigheten som står normalt på posisjonsvektoren.

Ligning (36) følger fra de generelle uttrykkene for energi og dreieimpuls

$$\begin{aligned} E &= \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mMG_N}{R}, \\ L &= |\vec{r} \times m\vec{v}| = mRu. \end{aligned} \tag{37}$$

g) Når massen m er i perihelium og apihelium må $u(t) = v(t)$. Hvorfor? Bruk denne betingelsen til å finne en kvadratisk ligning for avstandene $R_\mp$ til perihelium/apihelium, og løs denne ligningen.

Når $R(t)$ er minimal (perihelim) eller maksimal (apihelium) er

$$\frac{d}{dt}R^2 = 2\vec{r}(t) \cdot \vec{v}(t) = 0,$$

så hastighetsvektoren $\vec{v}$ står normalt på $\vec{r}$. Da blir $u = v$. Dette innsees også geometrisk fra figuren.

Ved å identifisere uttrykkene i ligning (36) finner vi

$$R^2 + \frac{mMG_N}{E}R - \frac{L^2}{2mE} = 0. \tag{38}$$

Løsningene er

$$\begin{aligned} R_\pm &= \left(\frac{mMG_N}{-2E}\right)\left[1 \pm \sqrt{1 + 2\frac{EL^2}{m^3M^2G_N^2}}\,\right] \\ &= \left(\frac{mMG_N}{-2E}\right)\left[1 \pm \sqrt{1+2\delta}\,\right] \end{aligned} \tag{39}$$

h) Bruk løsningen fra forrige punkt til å uttrykke bevegelseskonstantene E og L ved avstandene R_+ og R_- (foruten m, M og G_N).

Tips: Energien E kan bestemmes når *summen* $R_+ + R_-$ er kjent. Parameteren δ, definert i punkt **3d)**, kan bestemmes når *forholdet* R_-/R_+ er kjent.

Ved å addere løsningene (39) finner vi

$$E = -\frac{mMG_N}{R_+ + R_-}. \tag{40}$$

Ved å ta forholdet mellom løsningene (39 finner vi

$$\frac{R_+}{R_-} = \frac{1+\sqrt{1+2\delta}}{1-\sqrt{1+2\delta}},$$

som løst med hensyn på δ gir

$$\delta = -\frac{2R_+R_-}{(R_+ + R_-)^2}.$$

Vi kombinerer så definisjonen av δ med ligning (40), og finner

$$L = \sqrt{\frac{2m^2MG_NR_+R_-}{R_+ + R_-}}. \tag{41}$$

i) Finn de numeriske verdiene for E og L for 1 kg masse i en *Hohmann transfer orbit* fra jorda til Mars.

Vi observerer at

$$E = \frac{2E_J E_M}{E_J + E_M}, \tag{42}$$

$$L = \sqrt{\frac{2L_J^2 L_M^2}{L_J^2 + L_M^2}} \tag{43}$$

Med $E_J = -\frac{1}{2}\times 1\,\mathrm{kg}\times(29.8\ \mathrm{km/s})^2 \approx -444\times 10^6$ J og $E_M = -\frac{1}{2}\times 1\,\mathrm{kg}\times(24.1\ \mathrm{km/s})^2 \approx -291\times 10^6$ J finner vi

$$E = -352\times 10^6\ \mathrm{J}. \tag{44}$$

Med $L_J = 1\ \mathrm{kg}\times v_J R_J = 4.456\times 10^{15}$ Js og $L_M = 1\ \mathrm{kg}\times v_M R_M = 5.501$ Js finner vi

$$L = 4.897\times 10^{15}\ \ \mathrm{Js}. \tag{45}$$

Kommentarer: Vi merker oss at man, for å få romsonden fra jordbanen og inn i Hohmann banen, må øke hastigheten fra $v_J = 29.8$ km/s til

$$v_P = \frac{L}{L_J}\, v_J = 32.7\ \mathrm{km/s}. \tag{46}$$

Dette krever en energitilførsel på

$$\Delta E_P = \frac{1}{2}\ \mathrm{kg}\times\left(v_P^2 - v_J^2\right) = 92.1\times 10^6\ \mathrm{J/kg}, \tag{47}$$

som stemmer med den differansen $E - E_J$ vi allerede har funnet. Når romsonden kommer fram til Mars har dens hastighet sunket til

$$v_A = \frac{L}{L_M}\, v_M = 21.5\ \mathrm{km/s}. \tag{48}$$

For få sonden inn i Marsbanen må dens hastighet økes til v_M; dette krever en energitilførsel på

$$\Delta E_A = \frac{1}{2}\mathrm{kg}\times\left(v_M^2 - v_A^2\right) = 60.5\times 10^6\ \mathrm{J/kg}, \tag{49}$$

som stemmer med differansen $E_M - E$.

I praksis må man ta også ta hensyn til gravitasjonsfeltene fra jorda og Mars. Ved riktig manøvrering kan man bruke gravitasjonskraften fra Mars til å *øke* sondens energi (gravitasjonsslynge). Dette prinsippet har vært brukt av sonder som skal videre til de ytre planetene. Men det er passende tema for en annen oppgave ...

Det er også lett å regne ut den tiden det tar å sende en sonde fra jorda til Mars. Fra uttrykket for dreieimpuls ser vi at

$$\frac{L}{m}dt = |\vec{r}\times d\vec{r}| = 2dA, \tag{50}$$

der A er arealet som sveipes ut av radiusvector fra sola til sonden. (Kepler's annen lov, som sier at dA/dt er konstant, er derfor ekvivalent med bevaringsloven for dreieimpuls.) Vi vet at banen er en ellipse, med areal

$$A = \pi ab,$$

der $2a = (R_+ + R_-)$ er største diameter og $2b = \sqrt{4R_+R_-}$ er minste diameter. Altså er $2A = \pi(R_+ + R_-)\sqrt{R_+R_-}$, og et fullt omløp av ellipsen tar

$$T = \frac{2mA}{L} = \frac{\pi}{2MG_N}\left(R_+ + R_-\right)^{3/2}. \tag{51}$$

En Hohmann bane fra jorda til Mars tar et halvt omløp,

$$\frac{T}{2} = \frac{1}{2}\left(T_J^{2/3} + T_M^{2/3}\right)^{3/2} = 0.7 \text{ år} \quad (257 \text{ dager}). \tag{52}$$

Mars må derfor være i en posisjon $360^\circ \times 0.7/1.88 = 135.7^\circ$ før møtepunktet ved oppskytning. Dette inntreffer med tidsintervall $T_J T_M/(T_M - T_J)$, dvs. med 780 dagers mellomrom. Når sonden kommer fram til Mars har jorda beveget seg en vinkel $360^\circ \times 0.7 - 180^\circ = 75^\circ$ forbi linjen fra sola til møtepunktet.