Eksamen i SIF4004, 11. desember, 2002
Løsningsforslag

Oppgave 1

a) Fallet tar en tid t. Hastigheten er da $v_1 = gt$. Stangen har beveget seg et stykke $b = gt^2/2$. Eliminerer vi t mellom disse ligningene, finner vi $b = (gt)^2/(2g) = v_1^2/(2g)$, slik at

$$v_1 = \sqrt{2gb}\ . \qquad (L-1)$$

b) Angulærmomentet om C rett før kollisjonen med C er $L = (b/2)mv_1$, siden massesenteret er i avstand $b/2$ fra C på dette tidspunkt. Angulærmomentet om dette punktet er uendret etter kollisjonen siden kraften som er involvert virker gjennom dette punktet. Angulærmomentet rett etter kollisjonen er $L = I\omega_1$ hvor I er treghetsmomentet av en stang av lengde b om enden av stangen,

$$I = \frac{m}{b}\int_0^b x^2\,dx = \frac{mb^2}{3}\ . \qquad (L-2)$$

Altså, setter vi $L = mbv_1/2$ lik $L = mb^2\omega_2/3$, finner vi

$$\omega_2 = \frac{3v_1}{2b} = \sqrt{\frac{9g}{2b}}\ . \qquad (L-3)$$

c) Vi bruker energikonservering. Energien er $E = I\omega_2^2/2 + mgb/2$ rett etter kollisjonen med C. I nederste posisjon er energien $E = I\omega_3^2/2$. Vi setter disse lik hverandre, bruker (L-2) og finner

$$\omega_3 = \sqrt{\frac{3g}{b} + \omega_1^2} = \sqrt{\frac{15g}{2b}}\ . \qquad (L-4)$$

d) Stangens massesenter vil følge fri-fall parabelen med initial hastighet $v_4 = b\omega_3/2$ rettet horisontalt. I massesenterets system vil stangen rotere med klokken og vinkelhastighet ω_3.

Oppgave 2

a) Massen av skiven er $m = \rho\pi R^2$, hvor ρ er massetettheten. Treghetsmomentet er

$$I = \int_0^R \rho 2\pi r^3\, dr = \frac{\rho\pi R^4}{2} = \frac{mR^2}{2}\ . \qquad (L-5)$$

b) Tre ytre krefter virker på skiven: 1) Gravitasjonskraften mg som virker nedover gjennom skivens sentrum, 2) normalkraften $N = mg$ som virker oppover gjennom kontaktpunktet mellom skiven og underlaget og 3) friskjonskraften $f = \mu mg$ som virker forover (det vil si motsatt av rotasjonsretningen til skiven) i horisontal retning.

c) Vi bruker spinnsatsen for å finne vinkelakselerasjonen: $Id\omega/dt = Rf$. Bruker vi (L-5) og resultatet fra b), har vi $d\omega/dt- = 2\mu g/R$. Integrerer vi opp denne finner vi

$$\omega = \omega_0 - \frac{2\mu g}{R}\ t\ . \qquad (L-6)$$

Kraften som virker på massesenteret er f. Altså, $ma_{ms} = f = \mu mg$, hvor a_{ms} er massesenterakselerasjonen. Integrerer vi opp denne, finner vi for hastgheten av skivens sentrum

$$v = a_{ms}t = \mu gt\ . \qquad (L-7)$$

Skiven spinner med hensyn til underlaget inntil massesenterhastigheten v er lik rotasjonshastigheten av skiven hvor A er hastghetspolen, $v = R\omega$. Dette skjer ved $t = t_1$: $\mu g t_1 = R(\omega_0 - 2\mu g t_1/R)$. Dette gir

$$t_1 = \frac{R\omega_0}{3\mu g}\ . \qquad (L-8)$$

Etter t_1 ruller skiven uten å spinne.

d) Kinetisk energi ved $t = 0$ er $K_0 = I\omega_0^2/2 = mR^2\omega_0^2/4$. Ved $t = t_1$ er hastigheten til massesenteret $v = \mu g t_1 = R\omega_0/3$. Vinkelhastigheten er $\omega = \omega_0 - 2\mu g t_1 = \omega_0/3$. Den kinetiske energien er $K_1 = mv^2/2 - I\omega^2/2 = mR^2\omega_0^2/12$. Endringen i kinetisk energi er derfor

$$K_1 - K_0 = -\frac{mR^2\omega_0^2}{6}\ . \qquad (L-9)$$

Relativ hastighet mellom skive og underlag er $\Delta v = R\omega - v = R\omega_0 - 2\mu g t - \mu g t = R\omega_0 - 3\mu g t$. Arbeidet utført av friksjonskraften er

$$W = \int_0^{t_1} f \ \Delta v \ dt = \mu m g \int_0^{t_1} (R\omega_0 - 3\mu g t) \ dt = \frac{m R^2 \omega_0^2}{6} \ . \qquad (L-10)$$

Som forventet er ligning (L-9) motsatt lik ligning (L-9): Endring i kinetisk energi er lik arbeid utført av systemet.

Oppgave 3

a) Carnot-syklusen består av en isoterm ekspansjon, adiabatisk ekspansjon, isoterm kompresjon og adiabatisk kompresjon.

b) Virkningsgraden av Carnotmaskinen er gitt ved

$$\eta = \frac{W}{Q_h} = 1 - \frac{Q_c}{Q_h} = 1 - \frac{T_c}{T_h} \ , \qquad (L-11)$$

slik at

$$Q_c = Q_h \ \frac{T_c}{T_h} \ . \qquad (L-12)$$

Vi deriverer med hensyn på tiden og finner

$$\frac{dQ_c}{dt} = \frac{dQ_h}{dt} \ \frac{T_c}{T_h} = 5 \text{ kW} \ \frac{263}{293} = 4.5 \text{ kW} \ . \qquad (L-13)$$

c) Balanse av varmefluks inn i maskinen dQ_c/dt og effekt utført på maskinen, dW/dt, mot varmefluks ut av maskinen, dQ_h/dt, gir

$$\frac{dW}{dt} = \frac{dQ_h}{dt} - \frac{dQ_c}{dt} = 0.5 \text{ kW} \ . \qquad (L-14)$$

d) Effektiviteten er gitt ved

$$e = \frac{Q_h}{W} = \frac{1}{\eta} = \frac{T_h}{T_h - T_c} = 9.7 \ . \qquad (L-15)$$

Oppgave 4

a) En adiabatisk prosess er en termodynamisk likevektsprosess hvor det ikke foregår varmeutveksling med omgivelsene.

b) Vi tar utgangspunkt i termodynamikkens første hovedsetning,

$$dQ = dU + dW \ . \qquad (L-16)$$

Siden systemet er en ideel gass, har vi også at

$$pV = nRT \ . \qquad (L-17)$$

Den indre energien U er bare en funksjon av temperatur og antall mol, $U = U(T,n)$.

Frst endrer vi systemet ved konstant volum. Siden $dW = pdV$, har vi at $dW = 0$ i dette tilfellet. Vi har også at

$$dQ = C_V dT \ , \qquad (L-18)$$

og kombinerer vi denne ligningen med (L-16), har vi

$$C_V dT = dU \ . \qquad (L-19)$$

La oss nå endre systemet ved konstant trykk. Vi har da at

$$dQ = C_p dT = dU + pdV = C_V dT + pdV \ . \qquad (L-20)$$

Differensierer vi nå ligning (L-17) under forutsetning at p er konstant, finner vi

$$pdV = nRdT \ . \qquad (L-21)$$

Denne kombineres med (L-20) og vi finner

$$C_p = C_V + nR \ . \qquad (L-22)$$

Vi antar nå en adiabatisk endring av systemet. Per definisjon er $dQ = 0$ og vi har

$$dU + dW = dU + pdV = C_V dT + pdV = 0 \ . \qquad (L-23)$$

Bruker vi nå ligning (L-17), får vi

$$C_V dT + pdV = C_V dT + \frac{nRT}{V} dV = 0 \; . \qquad (L-24)$$

Altså,

$$C_V \frac{dT}{T} + nR \frac{dV}{V} = C_V \frac{dT}{T} + (C_p - C_V) \frac{dV}{V} = 0 \; . \qquad (L-25)$$

Her har vi brukt ligning (L-22). Vi definerer nå $\gamma = C_p/C_V$ og (L-25) blir

$$\frac{dT}{T} + (\gamma - 1) \frac{dV}{V} = 0 \; . \qquad (L-26)$$

Vi integrerer denne og finner

$$\ln T + (\gamma - 1) \ln V = \ln T V^{\gamma - 1} = \ln(konstant) \; , \qquad (L-27)$$

eller

$$T V^{\gamma - 1} = konstant \; . \qquad (L-28)$$

Kombinerer vi denne ligningen med (L-17) finner vi

$$p V^{\gamma} = konstant \; , \qquad (L-29)$$

som er ligningen vi søker.

d) Arbeidet fra B til C er gitt ved

$$W_{BC} = \int_{V_{AB}}^{V_C} p \; dV = C \; \int_{V_{AB}}^{V_C} V^{\gamma} \; dV = \frac{C}{\gamma - 1} \; (V_{AB}^{1-\gamma} - V_C^{1-\gamma}) \; , \qquad (L-30)$$

hvor $C = p_B V_{AB}^{\gamma} = p_C V_C^{\gamma}$. Substituerer vi for C og bruker (L-17), finner vi

$$W_{AB} = \frac{nR}{\gamma - 1} \; (T_h - T_c) \; . \qquad (L-31)$$

Arbeidet mellom C og A er

$$W_{CA} = \int_{V_C}^{V_{AB}} \; pdV = nRT_C \ln \left(\frac{V_{AB}}{V_C} \right) \; , \qquad (L-32)$$

hvor vi igjen har brukt (L-17). Arbeidet for prosessen mellom A og B, $W_{AB} = 0$. Totalarbeidet er derfor

$$W = W_{BC} + W_{CA} + W_{AB} = \frac{nR}{\gamma - 1}\,(T_h - T_c) - nRT_C \ln\left(\frac{V_C}{V_{AB}}\right) \quad (L-33)$$

Varmeutvekslingen mellom A og B er Q_h og mellom C og A er Q_c — det er ingen varmeutveksling under den adiabatiske prosessen fra B til C. Siden prosessen fra C til A er isoterm, vil den indre energien i systemet ikke endre seg og vi har at

$$Q_c = -W_{CB} = nRT_C \ln\left(\frac{V_C}{V_{AB}}\right) \; . \quad (L-34)$$

Videre har vi at

$$W = Q_h - Q_c \; . \quad (L-35)$$

Kombinerer vi denne ligningen med (L-33) og (L-34), har vi virkningsgraden:

$$\eta = \frac{W}{Q_h} = \frac{W}{W + Q_c} = 1 - (\gamma - 1)\frac{T_c}{T_h - T_c}\,\ln\left(\frac{V_C}{V_{AB}}\right) \; . \quad (L-36)$$