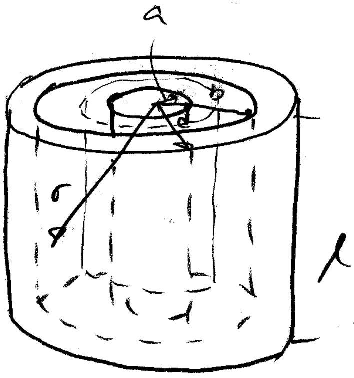
SIF 4005 Eksamen 7. des. 1998 Løsningsforslag.

Oppgave 1.

a)



$\vec{E}$ er radielt rettet (ser bort fra endeeffekter)

Velger Gaussflate som en konsentrisk sylinder med radius $a<r<b$.

Endeflatene er inne i kondensatoren.

$\vec{E} \perp d\vec{A}$ på endeflatene og $\vec{E} \parallel d\vec{A}$ på sylinderflaten.

Høyden på gaussflaten er ℓ.

For $a<r<b$ er da:

$$\oint \vec{D} \cdot d\vec{A} = Q_{inn} = -\lambda \cdot \ell$$

$$\oint \vec{D} d\vec{A} = \iint_{sylinder} \varepsilon_0 \vec{E} d\vec{A} + \iint_{ender} \varepsilon_0 \vec{E} d\vec{A} = \varepsilon_0 \iint_{sylinder} E \, dA$$

$$= \varepsilon_0 \cdot E \cdot 2\pi \cdot r \cdot \ell$$

$$\underline{\vec{E} = \frac{-\lambda}{2\pi\varepsilon_0 r} \vec{e}_r}$$

ii) For $r<a$ og $r>b$: Inni i metall er $|\vec{E}|=0$ (elektrisk leder).

$\Rightarrow |\vec{E}|=0$ for $r<a$ og $b<r<c$

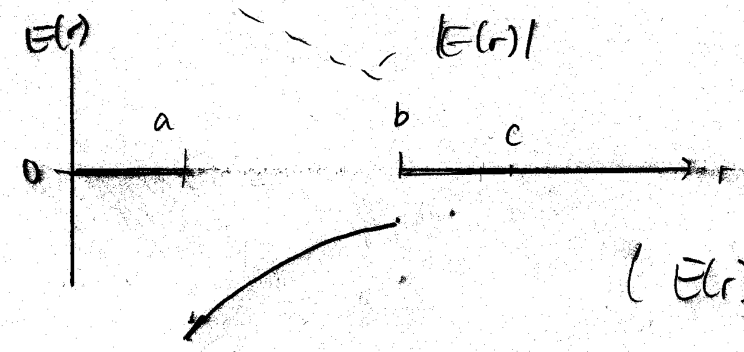
For

For $r > c$:

$$\oint \vec{D}\, d\vec{A} = \varepsilon_0 \cdot E \cdot 2\pi r l = Q_{inne} = l(-\lambda + \lambda) = 0$$

$$\underline{\underline{E = 0 \text{ for } r > c}}$$

(iii)



(E(r), med fortegn)

b) Elektrisk potensial:

$$V_1 - V_2 = -\int_2^1 \vec{E}\, d\vec{l}$$

$r > b$: $\quad V(r) - V(r=b) = -\int_b^r \vec{E}\, d\vec{l} = 0$

fordi $E(r) = 0$ for $r > b$

Velger referansepunkt $V(r=b) = 0 \Rightarrow \underline{\underline{V(r) = 0 \text{ for } r > b}}$

For $a < r < b$:

$$V(r) - V(b) = -\int_b^r \vec{E}\, d\vec{l}$$

$$V(r) = V(b) - \int_b^r \vec{E}\, d\vec{l}$$

Velger $d\vec{l} = \vec{e}_r\, dr$, og retning på $\vec{E}$ er langs $\vec{e}_r$:

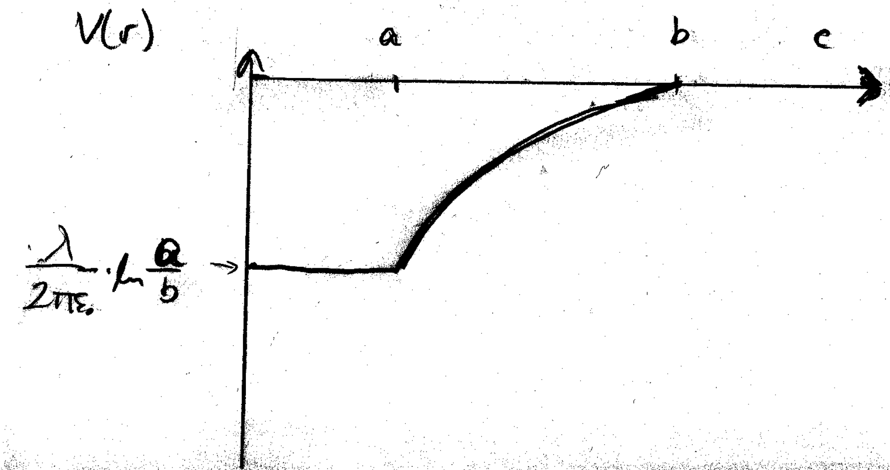
$$V(r) = V(b) - \int_b^r E\, dr = 0 + \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \int_b^r \frac{dr}{r}$$

$$V(r) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \Big|_b^r \ln r = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{r}{b}$$

Siden $r < b$, er $V(r < b) < 0$

For $r < a$:

$V(a) - V(r) = -\int_r^a \vec{E}\, d\vec{l} = 0$ siden $\vec{E} = 0$ i dette området.



b) Kapasitans er generelt gitt ved: $C = Q / \Delta V$
hvor ΔV er potensialforskjellen mellom de ladede delene.
For den aktuelle situasjon er

$$\Delta V = V(b) - V(a) = -\frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \ln \frac{a}{b} = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \ln \frac{b}{a}$$

Ladning på en lengde l av den koaksielle sylinderen er

$Q = \lambda \cdot l$, og kapasitans pr. lengdeenhet:

$$\frac{C}{l} = \frac{Q}{l \Delta V} = \frac{\lambda \cdot l}{l \cdot \lambda} \frac{2\pi\varepsilon_0}{\cdot \ln \frac{b}{a}} = \underline{\underline{\frac{2\pi\varepsilon_0}{\ln \frac{b}{a}}}}$$

d) I delspørsmål b) beregnet vi potensialforskjellen mellom ytre og indre sylinder til:

$$\Delta V = V(b) - V(a) = \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0} \cdot \ln\frac{b}{a}$$

Potensiell energi for en lengde l av kondensatoren er:

$$U = \frac{1}{2} \cdot Q \cdot \Delta V = \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot l \cdot \Delta V$$

Per enhets lengde gir dette: $\frac{U}{l} = \frac{1}{2} \cdot \lambda \cdot \Delta V = \frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0} \ln\frac{b}{a}$

I området hvor det dielektriske materialet er satt inn, vil endringen i potensiell energi som følge av innsetting av det dielektriske materialet være:

$$\frac{\Delta U}{l} = \frac{\lambda^2}{4\pi}\left(\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{\varepsilon_0}\right) \ln\frac{b}{a}$$

Ved innsetting til en lengde x er endring i potensiell energi:

$$\Delta U = \frac{\lambda^2 \cdot x}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right) \ln\frac{b}{a}$$

Siden $\varepsilon_r > 1$ er $\Delta U < 0$ $\Rightarrow$ potensiell energi minker, og den dielektriske pluggen <u>trekkes</u> inn i kondensatoren.

Kraften:

$$\underline{\underline{F = -\frac{dU}{dx} = -\frac{\lambda^2}{4\pi\varepsilon_0}\left(\frac{1}{\varepsilon_r} - 1\right) \cdot \ln\frac{b}{a}}}$$

(dvs positiv i positiv x-retning)

Oppgave 2.

Dobbeltspalter gir opphav til både diffraksjon og interferens.
Betrakter dette ved interferens som blir modulert av diffraksjon.

Intensitetsminimum for λ_a

Betingelse for minimum ved interferens:

$$d \cdot \sin\theta = \left(m + \tfrac{1}{2}\right) \cdot \lambda_a \quad , \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \text{osv}$$

hvor d: spalteavstand

θ: vinkel til observasjonsretning

Posisjoner på skjermen for m-te ordens interferens minima:

$$y_m = L \cdot \tan\theta_m = L \cdot \tan\left(\arcsin\left(\frac{\lambda_a}{d}\left(m + \tfrac{1}{2}\right)\right)\right)$$

m	θ	y_m	~~og tilsvarende for negative θ:~~
0	5.63	0.148m	−0.148
1	17.12	0.462	osv.
2	29.39	0.845	
3	43.40	1.418	
4	62.06	2.83	

Sjekker om det i tillegg er minimum fra diffraksjonen:

$$a \cdot \sin\theta = n\lambda \quad , \quad n = \pm 1, \pm 2, \text{osv}$$

hvor a er spaltebredde:

n et heltall.

Minima fra diffraksjon observeres ved $y_n = L \cdot \tan\theta_n$

$$= L \cdot \tan\left(\arcsin\left(\frac{\lambda_a}{a} \cdot n\right)\right)$$

Kun for $n = \pm 1$: $y_{+1} = 1.09\,m$ $\quad (y_{-1} = -1.09\,m)$

Totalt: Minima for λ_a ved følgende y:
$(0.148, 0.462, 0.845, 1.09, 1.918, 2.83)$ m, og tilsvarende for negativ y.

Intensitetsmaks for λ_b observeres ved
fra intensitetsmaks i interferensmønsteret: betingelse for maks intensitet:

$$d \sin\theta = m\lambda$$

Som for minima: $y_{maks} = L \cdot \tan\left(\arcsin\left(\frac{\lambda_b}{d} m\right)\right)$

m =	y_m for λ_b	θ_m
0	0	
1	0.301	11.33
2	0.641	23.15
3	1.095	36.13
4	1.908	51.82
5	7.951	79.32

I tillegg: diffraksjonen vil slukke ut 3. orden (samme utregn. som for λ_a)
Dette gir maks for
y_m: $(0, \pm 0.301, \pm 0.641, \pm 1.908, \pm 7.951)$ m

b) Forskyvning i observasjonsvinkel for m-te ordens hovedmaksimum når λ går fra $\lambda_a \rightarrow \lambda_b$ er gitt ved betingelsen:

$$\Delta(d \sin\theta_m) = d \cdot \sin\theta_m(\lambda_b) - d \sin\theta_m(\lambda_a)$$

$$= m\lambda_b - m\lambda_a$$

Minimum mellom hovedmaks i et gitter med N spalter er gitt ved:

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot d \sin\theta = \frac{2p\pi}{N} \qquad p = 1, 2, 3, \ldots$$
$$p \neq N, 2N, \text{osv.}$$

Ved å begrense $p \in (1, N-1)$, kan dette skrives:

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot d \sin\theta = \left(m + \frac{p}{N}\right) 2\pi \quad , \quad p = 1, 2, \ldots N-1$$
$$m = 0, 1, \ldots$$

Vinkelendring mellom hovedmaks og nærmeste minimum er:

$$\Delta(d \sin\theta_m) = d \sin\theta_m (N, p=1) - d \sin\theta_m (N, p=0)$$
$$= \lambda\left(m + \frac{1}{N}\right) - \lambda(m + 0) = \frac{\lambda}{N}$$

Betingelsen for å kunne observere dette er derfor at

$$m \cdot (\lambda_b - \lambda_a) > \frac{\lambda_a}{N}$$

eller: $N > \left.\frac{\lambda_a}{\lambda_b - \lambda_a} \frac{1}{m}\right|_{m=2} = 490.8 = \underline{\underline{491}}$

c) Objektet må plasseres slik at bildet får korrekte dimensjoner til å kunne brukes som dobbelt-spalte / gitter.
Ved å bruke spalteavstand som basis for bruk til forstørrelse får vi for dobbeltstrukturen:

$$\left|\frac{q}{p}\right| = \frac{\text{bildeavstand}}{\text{objektavstand}} = \frac{3\mu m}{0.6 mm} = 0.005$$

Avbildning er beskrevet ved tynn linse formelen:

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{f}.$$ Innsatt med $f = 50\,mm$ og krav

til forstørrelse gir dette: objektavstand: $\underline{\underline{p = 10.050\,m}}$;

bildeavstand er lik linse-filmplanavstand $\underline{\underline{q = 50.25\,mm}}$

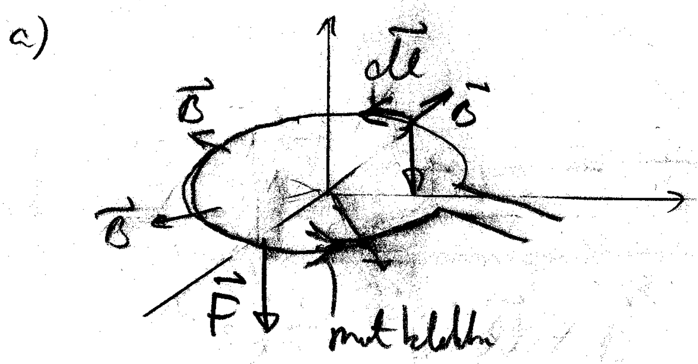
For stjernepunktet: $\left|\frac{q}{p}\right| = \frac{3\,\mu m}{0.45\,mm} = 0.00667$

Dette gir: $\underline{\underline{p = 7.55\,m}}$

$\underline{\underline{q = 50.33\,mm}}$

Oppgave 3.

a)



Generelt:

$$\vec{dF} = I\,\vec{dl} \times \vec{B}$$

Høyre hånds regel gir at $\vec{F} = -F\vec{e}_z = -F\vec{k}$

Størrelsen på kraften finnes ved å integrere $\vec{dF}$.

$\vec{dl} = R\,d\theta\,\vec{e}_\theta$, $\vec{e}_\theta \times \vec{e}_r = -\vec{k}$

$$F = \int_{\theta=0}^{2\pi} I \cdot R \cdot d\theta \cdot B_0 = \underline{\underline{2\pi I \cdot R \cdot B_0}}$$

b) Prinsippet som brukes er at summen av krefter fører til en akselerasjon i følge Newtons 2. lov:

Kraft fra opphengsfjær: $F_1 = -k \cdot z$

Kraft fra bevegelse av luft $F_2 = -b\,\frac{dz}{dt}$

Kraft fra strøm som går i viklingene:

$$F_3 = F(t) = n \cdot 2\pi I R \cdot B_0$$

Totalt:

$$F_1 + F_2 + F_3 = m \cdot \frac{d^2z}{dt^2}$$

$$-kz - b\frac{dz}{dt} + F(t) = m\frac{d^2z}{dt^2}$$

Dette gir:

$$m\frac{d^2z}{dt^2} + b\frac{dz}{dt} + kz = F(t)$$

ci) Denne situasjonen tilsvarer svingninger av høyttalermembranen uten kraftpåvirkning, dvs løsning av likn.:

$$m\frac{d^2z}{dt^2} + b\frac{dz}{dt} + kz = 0$$

med grensebetingelse $z(t=0) = \frac{F(I = 1\,\text{cos}\,A)}{k}$

og $\frac{dz}{dt}(t=0) = 0$

Løsningen av diff.likn. uten kraftpåvirkning:

$$z(t) = A \cdot e^{-\frac{b}{2m}\cdot t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t + \varphi)$$

hvor A: amplitude

ω_d: dempet frekvens: $\omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{b^2}{4m^2}}$

$$= \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}$$

Kraft ved $t<0$ $\quad F_{n=1} = 2\pi \cdot I \cdot R \cdot B_0$ pr vikling

totalt for n viklinger: $\quad F = 2\pi \cdot n \cdot I R \cdot B_0$

$$F = 2\pi \cdot 100 \cdot 10^{-3} A \cdot 0.025 m \cdot 0.3 T \cdot 4000 =$$

$$= 18.85 \, A\,m\,T = 18.85 \cdot A \, \cancel{m\,kg} \, s^{-2} A^{-1} = 18.85 N$$

$$z(t=0) = \frac{F}{k} = \frac{18.85 N}{5000 N/m} = 3.77 \, mm = z_0$$

Innsatt for $t=0$:

$$z_0 = A \cdot e^{-0} \cdot \cos(\varphi) = 3.77 \, mm$$

For hastigheten:

$$\frac{dz}{dt} = -\frac{b}{2m} \cdot A e^{-\frac{b}{2m}t} \cdot \cos(\omega_d \cdot t + \varphi) - \omega_d A e^{-\frac{b}{2m}t} \sin(\omega_d t + \varphi)$$

Innsatt $t=0$:

$$\frac{dz}{dt}(t=0) = 0 = -\frac{b}{2m} \cdot \cos\varphi - \omega_d \cdot \sin\varphi$$

$$\tan\varphi = -\frac{b}{2m\,\omega_d} = -\frac{7.0 \, kg \, s^{-1}}{2 \cdot 0.01 kg \quad s^{-1}} = -0.5697$$

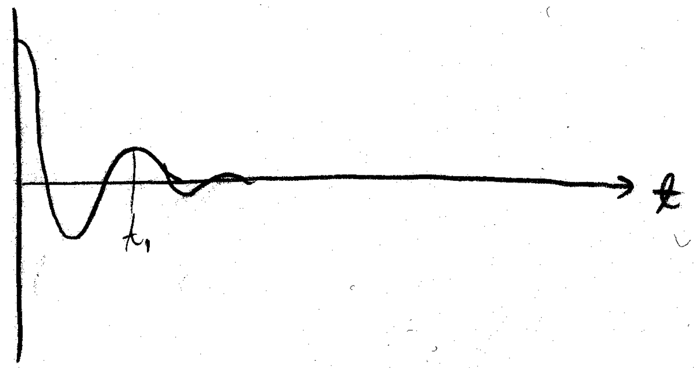
$$\left(\omega_d = \sqrt{\frac{5000}{0.01} - \frac{7.0^2}{(2 \cdot 0.01)^2}} = 614.4 s^{-1} ; \frac{b}{2m} = 350 s^{-1} \right)$$

$\varphi = -29.67°$. Dette gir: $A = \frac{z_0}{\cos\varphi} = 4.34 \, mm$

Løsning:

$$z(t) = \frac{z_0}{\cos\varphi} e^{-\frac{b}{2m} \cdot t} \cdot \cos(\omega_d t + \varphi) = 4.34 e^{-350 t} \cos(614.4 t - 29.67°)$$

$\varphi = -29.67°$



Amplituden ved $t_1 = \frac{2\pi}{\omega_d} = \frac{2\pi}{614.45 s^{-1}} = 0.0102 s$ er

$e^{-350 s^{-1} \cdot 0.0102 s} = 0.028$ av amplitude ved $t=0$

c) Difflikningen er nå:

$$m\frac{d^2z}{dt^2} + b\frac{dz}{dt} + kz = F(t) = 2\pi n \cdot I_0 \cdot R \cdot B_0 \sin(\omega t)$$

Bruker $F_0 = 2\pi n \cdot I_0 \cdot R \cdot B_0$

Løsning er på forme:

$$z(t) = |a| \sin(\omega t + \varphi)$$

$$|a| = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega^2-\omega_0^2)^2 + \left(\frac{b}{m}\right)^2\omega^2}}$$

$$\tan\varphi = m\frac{(\omega^2-\omega_0^2)}{b\,\omega} \qquad \omega_0 = \sqrt{500\cdot 10^3}\ s^{-1} = 707.1\ s^{-1}$$

for $f = 44\ Hz$: $\omega = 2\pi \cdot 44\ s^{-1} = 276.46\ s^{-1}$

$a(f=44\ Hz) = \underline{\underline{4.05\ mm}}$

$\varphi = \arctan(-2.188)$

$\varphi = -65.44°$

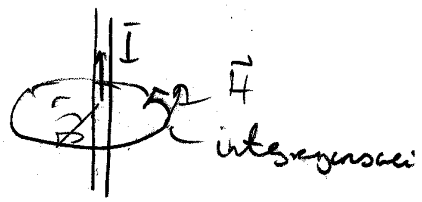
for 200 Hz:

$a = \underline{\underline{11.35\ mm}}$

$\varphi = \arctan(1.226) = \underline{\underline{50.81°}}$

Oppgave 4.

Amperes lov for en leder

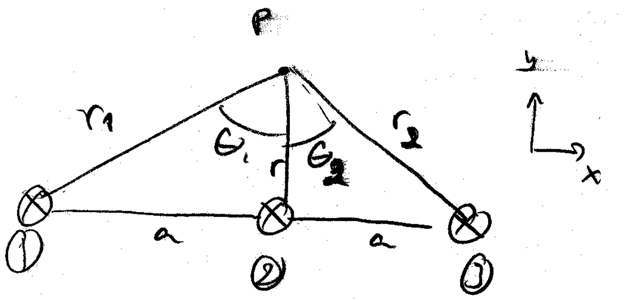


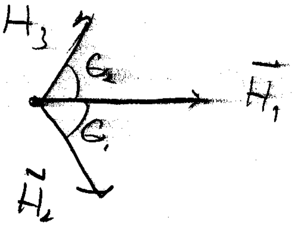
$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = I_{kryssende} \quad ; \quad \vec{H} = H\vec{e}_\theta$$

Anvendt: velger integrasjons sti som en konsentrisk sirkel om lederen: da er $\vec{H} \parallel d\vec{l} \Rightarrow \vec{H}\cdot d\vec{l} = H\,dl$

$$\oint \vec{H}\cdot d\vec{l} = H\oint dl = H\int_{\theta=0}^{2\pi} r\,d\theta = 2\pi r H = I_{inne}$$

$$\vec{H} = \frac{I_{inne}}{2\pi r}\vec{e}_\theta$$





Magnetfeltstyrker fra hver av lederne 1, 2 og 3.

Vertikal komponentene av H_2 og H_3 er like store og motsatt rettet. Disse kansellerer. Ser på horisontal komponentene.

$$\vec{H}_{tot} = \vec{H}_1 + |\vec{H}_2|\cdot\cos\theta_1\,\vec{i} + |\vec{H}_3|\cdot\cos\theta_2\,\vec{i}$$

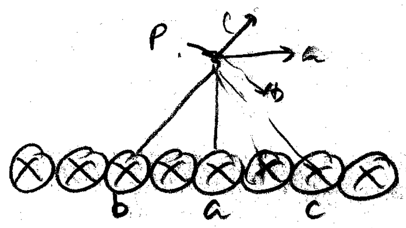
$$= \frac{I}{2\pi r} + \frac{I}{2\pi r_1}\cdot\cos\theta_1 + \frac{I}{2\pi r_2}\cdot\cos\theta_2$$

$$\cos\theta_1 = \frac{r}{r_1} \quad ; \quad \cos\theta_2 = \frac{r}{r_1}$$

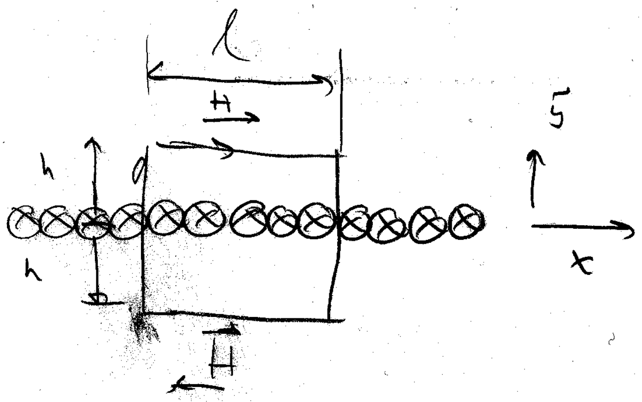
$$\vec{H}_{tot} = \frac{I}{2\pi r}\left(1 + 2\left(\frac{r}{r_1}\right)^2\right)\vec{i}$$

$$= \frac{5\,A}{2\pi\cdot 0.05\,m}\left(1 + 2\,\frac{5^2}{5^2+8^2}\right) = 24.9\ \frac{A}{m}$$

b)



Bidrag til magnetisk feltstyrke i pkt p: for leder plassert under normalen: $\vec{H}$ parallelt planet.
For leder b: gir $\delta\vec{H}$ med komponent ⊥ planet, men kan finne en leder (c i eksempelet) som gir et like stort og bidrag ⊥ på planet og motsatt rettet.
Dette gjelder for vilkårlig valg av ⊗ leder
⇒ ingen komponenter av $\vec{H}$ ⊥ planet. Bruk av Amperes lov viser at $|\vec{H}|$ er uavhengig av avstand (se under) ⇒ magnetfeltet er homogent.



Velger integrasjonssti som et rektangel med sider som er enten ⊥ eller ∥ strømførende plan.

Amperes lov:

$$\oint \vec{H} \cdot \vec{dl} = \underbrace{\int_{2\,\text{sidekanter}} \vec{H} \, \vec{dl}}_{\vec{H} \perp \vec{dl}} + \underbrace{\int_{2\,\text{lengder}} \vec{H} \cdot \vec{dl}}_{\vec{H} \parallel \vec{dl}} = 2 \cdot l \cdot \vec{H} = n_l \cdot l \cdot I$$

hvor n_l : antall ledere per lengdeenhet

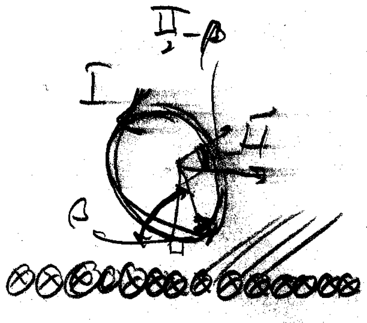
$n_l \cdot l$: antall ledere i lengden l

Dette gir :

$$\vec{H} = \frac{n_l \cdot I}{2} \vec{i} = \frac{500}{2} \frac{1}{m} \cdot 5A = \underline{\underline{1.25 \cdot 10^3 \, A/m \; \vec{i}}}$$

(avstanden h er ikke av betydning, siden $|\vec{H}|$ ikke avhenger av h)

c)



Fluks gjennom sløyfe:

$$\phi_B = \iint \vec{B} \, \vec{dA} = \mu_0 \iint \vec{H} \, \vec{dA} = \mu_0 \iint H \cdot dA \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right)$$

Siden H er uavhengig av h, kan vi sette dette på utsiden av integrasjonstegnet:

$$\phi_B = \mu_0 \cdot H \cdot \cos\left(\frac{\pi}{2} - \beta\right) \cdot \iint dA = \mu_0 \cdot H \sin\beta \cdot \pi r^2$$

$$= \mu_0 \cdot \frac{n_l \cdot I}{2} \cdot \sin\beta \cdot \pi r^2$$

Nå er $I = I_0 (1 - \alpha \cdot t)$

$$\Phi_B = \mu_0 \cdot \frac{n_L \cdot I_0}{2}(1-2\cdot t)\ \sin\beta \cdot \pi r^2$$

Indusert elektromotorisk kraft

$$|\mathcal{E}| = \frac{d\Phi_B}{dt} = \mu_0 \cdot \alpha \cdot \frac{n_L \cdot I_0}{2}\ \sin\beta \cdot \pi r^2$$

Setter opp en strøm:

$$I = \frac{\mathcal{E}}{R} = \alpha\ \frac{\mu_0 \cdot n_L \cdot I_0}{2R}\ \sin\beta\ \pi r^2$$

Retning som angitt.

Finner α:

$$\alpha = \frac{2 \cdot I \cdot R}{\mu_0 \cdot n_L \cdot I_0 \cdot \sin\beta \cdot \pi r^2}$$

$$= \frac{2 \cdot 0{,}2 \cdot 10^{-3}\,\mathrm{A} \cdot 22\,\Omega}{4\pi \cdot 10^{-7}\,\mathrm{H/m} \cdot 500\,\mathrm{m}^{-1} \cdot 5\,\mathrm{A} \cdot \sin 60^\circ \cdot \pi \cdot (0.1\,\mathrm{m}^2)}$$

$$= \underline{\underline{9{,}36\,\mathrm{s}^{-1}}}$$